FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOMVS IV.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXVI.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXIX.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXVI.

Avec une Planche.

HISTOIRE. Pag.

Démiſſion de Mrs. Ferber & Gollovin. - - - 3.
Mort de M. l'Adjoint Platzmann. - - - - 4.
Engagement de deux nouveaux Adjoints. - - - ibid.
Cours publics. - - - - - - - 5.
Nouveau arrangement du Cabinet des minéraux. - - ibid.
Prix propoſé. - - - - - - - - ibid.
Ouvrages publiés par l'Académie. - - - - - 6.
Nouvelles acquiſitions. - - - - - - 7.
Morts de deux Aſſociés externes. - - - - 8.
Receptions. - - - - - - - - 9.
Gratifications. - - - - - - - 10.
Ouvrages imprimés ou manuſcripts, machines & inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curioſités, préſentés ou envoyés à l'Académie. - 12.

)(2 Extrait

Pag.

Extrait de la lettre de M. l'Abbé Rochon, relative aux miroirs de platine & aux prismes, préſentés à la Séance académique le 25 Mai 1786. - - 33.

Sur une production très curieuſe de chenilles, remiſe à l'Académie par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice, *le 25 Août 1786* - - - - 35.

SUPPLÉMENT. *Mémoires préſentés à l'Académie Impériale des ſciences par divers Savans & approuvés dans ſes Aſſemblées.* - - - - 37.

Théorème ſur les centres de gravité. Par M. Lhuilier, Citoyen de Génève & Correſpondant de l'Académie à Varſovie - - - - - - 39.

Mémoire ſur les naiſſances, mariages & morts dans quelques provinces & villes de la Ruſſie. Par M. B. F. Hermann Conſeiller de Cour & Aſſocié penſionaire regnicole à Catharinenbourg en Perme. - 59.

Problematis cuiusdam ſphaerici ſolutio. Auctore F. T. Schubert, Academiae Geographo. Planche * fig. 1. 2. 89.

De curva loxodromica. Actore F. T. Schubert. Planche * fig. 3. - - - - - - - 95.

ADDITION *au troiſieme mémoire ſur le mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible, inſéré au Tome IIIe. des nouveaux Actes, par M. Jacques Bernoulli* - - - - - 102.

EXTRAIT *des mémoires contenus dans ce Volume.*

Claſſe de Mathématique - - - - 109.
Claſſe de Phyſico-Mathématique - - - 120.
Claſſe de Phyſique - - - - - 125.
Claſſe d'Aſtronomie - - - - - 132.
Météorologie. - - - - - - 134.

NOVA

V.

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS IV.

Cum VIII. Tabulis aeri inciſis.

MATHEMATICA

	Pag.
LEONH. EVLER. *Euolutio formulae integralis* $\int \partial x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx}\right)$ *a termino* x = 0 *vsque ad* x = 1 *extenſae.* Tab. I. fig. 1. - -	3.
—— —— *Vberior explicatio methodi ſingularis nuper expoſitae, integralia alias maxime abſcondita inveſtigandi.* - - - - - - -	17.
—— —— *Analyſis facilis & plana ad eas ſeries maxime abſtruſas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non ſolum radices ipſae, ſed etiam quaeuis earum poteſtates exprimi poſſunt.* -	55.
—— —— *De innumeris generibus ſerierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum non ſolum radices ipſae, ſed etiam quaecunque earum poteſtates exprimi poſſunt.* - -	74.
—— —— *De binis curvis algebraicis inueniendis, quarum arcus indefinite inter ſe ſint aequales.* Tab. I. fig. 2. 3. 4. - - - - - - -	96.
NICOL. FVSS. *Solutio problematis ex methodo tangentium inuerſa.* Tab. I. fig. 5. 6. Tab. II. fig. 1 —— 7. - - - - - -	104.

Pag.

PHYSICO-MATHEMATICA.

LEONH. EVLER. *De motu oſcillatorio tabulae ſuspenſae et a vento agitatae.* Tab. III. fig. 1 — 6. 131.

IAC. BERNOVLLI. *Dilucidationes in commentarium Ill. Euleri, de ictu glandium contra tabulam exploſarum Tomo XV° nouorum Commentariorum inſertum* 148.

— — *Eſſai ſur une nouvelle machine hydraulique, propre à élever de l'eau, & qu'on peut nommer machine Pitotienne.* Tab. III. fig. 7. 8. Tab. IV. 158.

WOLFG. LVDW. KRAFFT. *Suite du mémoire ſur les liſtes des mariages, des naiſſances & des morts à St. Pétersbourg, contenant la période de 1781 à 1785.* - - - - - - - 174.

PHYSICA.

CASP. FRIED. WOLFF. *De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio VIII. De fibris mediis ventriculi dextri. Pars prior.* - - - 211.

— — *Diſſertationis octauae de fibris mediis ventriculi dextri, Pars poſterior.* Huc referuntur duae tabulae de ordine fibrarum cordis VII. et VIII. 242.

IOH. GOTTL. GEORGI. *Experimenta ad imitationem, inuentae a Clar. D. Faxe chartae ſic dictae lapideae vel ardeſiae artificialis inſtituta.* - - 266.

BASIL. ZUIEW. *Deſcriptio Characis Leucometopontis* Tab. V. - - - - - - 275.

— — *Echeneidis noua ſpecies.* Tab. VI. - 279.

IOH.

Pag.

IOH. IAC. FERBER. *Enodatio quaeſtionis, an indoles matricis metalliferae et metalli quod continet, notam praebet certam qua dignosci poſſunt montes primarii a ſecundariis* - - - - - 284.

ASTRONOMICA.

STEPH. RVMOVSKY. *De eclipſi Solis anno 1787 die $\frac{4}{15}$ Iunii obſeruata.* - - - - - 293.

J. ALB. EULER. *Extrait des obſervations météorologiques faites, à St. Pétersbourg en l'année 1786 ſuivant le nouveau ſtile* - - - - - 306.

—— —— *Supplément.* - - - - - 322.

Avis

Avis au Relieur.

La planche * des figures inſcrite: *Hiſtoire de l'Académie Impériale des Sciences Année* 1786, doit être placée à la page 97. de la partie Hiſtorique, avant la feuille *n.*

Les doubles planches VII. & VIII. De ordine fibrarum cordis, à la page 265.

Les autres cinq planches I. II. III. IV. & V. peuvent être placées à la fin du volume, pag. 326.

Bericht an den Buchbinder.

Diejenige Kupfer-Tafel, welche überſchrieben iſt: Hiſtoire de l'Académie Impériale des Sciences Année 1786. Planche * *gehört vor der Seite 97 des hiſtoriſchen Theils, oder vor dem Bogen* n.

Die zwey doppelte Kupfer-Tafeln VII. *und* VIII. De ordine fibrarum cordis *überſchrieben, folgen nach der Seite* 265.

Die fünf übrige Kupfer-Tafeln I. II. III. IV. *und* V. *können zu Ende des Wercks angebunden werden.*

HISTOI-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES SCIENCES
ANNÉE MDCCLXXXVI.

L'Académie a perdu en cette année trois de ſes aſſociés ordinaires: deux l'ont quitté pour s'engager autrepart, & le troiſieme a été enlévé par la mort.

M. Jean-Jacques Ferber, Profeſſeur en Minéralogie & Académicien depuis 1783, prit ſa démiſſion d'abord au commencement de l'année, & partit pour ſe rendre à Vienne dès les premiers jours de Mars. L'Académie le compte depuis ce temps entre ſes Aſſociés externes.

M. Michel Golovin, Aſſeſſeur de Colleges (*), élévé à l'Académie & Adjoint en Phyſique expérimentale depuis 1775, demanda ſon congé presque en même temps, pour pouvoir ſe vouer entiérement à l'Inſtitut des écoles nationales, auquel il s'étoit engagé. Madame la Princeſſe de Daſchkaw lui accorda ſa demande & permit en lui conſervant le titre d'Adjoint, que

a 2 ſon

(*) Actuellement Conſeiller de Cour.

ſon nom ſoit transcrit dans la liſte des Aſſociés libres regnicoles. Il eſt un des éléves de feu M. Leonhard Euler.

Le troiſieme M. Martin Platzmann, Adjoint en Mathématiques depuis 1784 & éléve de feu M. Lexell, mourut le 26 Décembre, d'une conſomption accompagnée de fréquens accès d'hypochondrie, qui depuis plus d'un an ne lui avoient plus permis d'aſſiſter aux Séances académiques, ni de prendre part aux travaux des Académiciens.

M. Ferber ne fut point remplacé : mais à la place de Mrs. Golovin & Platzmann furent engagés deux nouveaux Adjoints en Mathématiques, qui ſont:

M. Jacques Bernoulli, fils cadet du Profeſſeur Jean Bernoulli à Bâle, Corréſpondent de l'Académie Royale des Sciences de Turin, & Secrétaire de M. le Comte de Breuner, Miniſtre de la Cour Impériale de Vienne, à Véniſe. Madame la Princeſſe de Daſchkaw lui fit offrir une place d'Adjoint en Mathématiques avec 600 roubles d'appointemens, & la promeſſe de l'avancer dans l'eſpace d'un an. M. Bernoulli l'accepta & arriva le 19 Septembre.

M. Fréderic Théodore Schubert, Géographe de l'Académie depuis 1784, ayant préſenté à l'Académie divers mémoires de Mathématiques qui lui avoient concilié l'eſtime & l'approbation de Mrs. les Académiciens, Madame la Princeſſe de Daſchkaw le propoſa le 18 Septembre, pour être reçu au nombre des Adjoints ordinaires, en conſervant ſes fonctions au département géographique. La reception ſe fit unanimement & M. Schubert fut, ainſi que M. Bernoulli, introduit le 25 Septembre dans la Séance académique.

Mrs.

Meſſieurs les Conſeillers de Cour Kotelnikof & Socolof donnérent, comme ils l'avoient fait l'année paſſée, des cours publics, le premier en Mathématiques & le ſecond en Chymie. Il s'y joignit un troiſieme, M. le Conſeiller de Cour & Académicien Ozeretskovski, qui donna un cours d'Hiſtoire naturelle en langue ruſſe. Ces Leçons n'eurent lieu, comme il l'a été dit dans le Reglement de leur inſtitution, que pendant les mois d'été, & Meſſieurs les Profeſſeurs qui s'en étoient chargés, reçurent chacun un honoraire de 375 roubles.

Mr. le Profeſſeur Ferber n'ayant pas pu achever avant ſon départ l'arrangement du Cabinet de minéralogie, dont il avoit été chargé, Madame la Princeſſe de Daſchkaw nomma Mrs. Géorgi, Zouyef & Rénovance, pour partager entr'eux ce travail & pour faire un nouveau catalogue du cabinet, après l'avoir rangé ſuivant le Syſtème de Wallérius. M. l'Adjoint Zouyef choiſit pour ſa part les concrétions & pétrifications, & Mrs. Géorgi & Rénovance travaillerent conjointement à l'arrangement des minéraux & autres foſſiles.

L'Académie avoit propoſé pour la ſeconde fois & renvoyé à l'année préſente, la queſtion qui concerne la force par laquelle la nutrition eſt pouſſée dans les parties deſtituées de vaiſſeaux propres à la recevoir, telles que l'épiderme, les ongles, les poils, les cornes &c. Des onze pieces qu'elle avoit reçues, il ne s'en trouva aucune qui ait touché le fond même de la queſtion, quoique quelques-unes contiennent de bonnes obſervations & réflexions. Deux en particulier parurent mériter qu'on en faſſe une mention honorable. La premiere, en françois, avec la deviſe, *Multa renaſcentur quae jam cecidere*, expoſe d'une maniere également ſolide & modeſte

la théorie des fonctions du corps humain en général & celle de la digeſtion en particulier. L'autre mémoire, en allemand, avec la deviſe : *Dies diem docet*, poſe des fondemens ſolides, mais ſur lesquels il ne conſtruit aucun édifice, ſans compter qu'il renferme bien des choſes hazardées, & d'autres mal-exprimées.

Cependant, comme ni l'un ni l'autre de ces mémoires traite du mouvement des humeurs au delà des vaiſſeaux, l'Académie vu l'importance de ſa queſtion, crut ne devoir pas l'abandonner: elle la propoſa donc pour la troiſieme fois & ſous les mêmes conditions (*), par un nouveau Programme qu'elle publia dans ſa ſéance du 20 Novembre, admettant au concours tous ceux qui enverront avant le 1er Juillet 1788 de nouveaux mémoires, auſſi bien que ceux qui voudront retoucher & perfectionner les mémoires qu'ils avoient envoyés aux concours précédens. Elle promit au reſte d'adjuger ce prix qui eſt de cent ducats d'Hollande, encore avant la fin de l'année 1788: & elle repeta dans ce même Programme, la queſtion qu'elle avoit propoſée pour le Prix de 1787, ſur l'effet d'une Comete qui s'approcheroit aſſés de la Terre pour que leur action réciproque devint ſenſible.

Parmi les ouvrages ſcientifiques que l'Académie a publiés pendant le cours de cette année, ſe trouvent être les plus intéreſſans :

Le XIe & le XIIe, ou bien le deux derniers volumes des Actes qui contiennent, l'hiſtoire de l'année 1782 diviſée en ſes deux ſemeſtres, & trente ſept mémoires de Mathématiques & de Phyſique.

Mémoires preſentés à l'Académie pour répondre à la queſtion minéralogique propoſée pour le Prix de 1785, contenant

(*) Hiſtoire de l'Académie, Année 1784. Pag. 10.

tenant la piece victorieuſe allemande de M. Charles Haidinger, & les deux acceſſit de Mrs. Launay & Soulavie, écrits en françois.

Le 2e & le 3e volume des voyages du defunt Prof. Falck, rédigées par M. le Prof. Georgi: *Herrn Johann Peter Falck's Beyträge zur topographiſchen Kenntniſs des Ruſsiſchen Reichs. II. Band: Beyträge zur Mineral- und Pflantzen Geſchichte. III. Band: Beyträge zur Thierkenntniſs und Völckerbeſchreibung.*

Une nouvelle carte générale de l'Empire de Ruſſie ſur trois feuilles, diviſée dans ſes Gouvernemens-Généraux & enluminée en trois bandes, ſuivant les uniformes des divers Gouvernemens. On y a marqué toutes les villes tant anciennes que nouvellement établies, en ſuivant les avis les plus récens & les dernieres obſervations aſtronomiques.

Outre pluſieurs traductions & ouvrages en langue ruſſe pour l'inſtruction & l'utilité publique, dont ſe ſont occupés Meſſieurs les Académiciens de la nation.

L'Académie a encore fait diverſes acquiſitions en cette année, dont nous n'allons indiquer que les principales, qui ſont:

Deux ouvrages fort anciens & très rares, que Madame la Princeſſe de Daſchkaw a achetés pour la Bibliothéque académique, de M. le Baron de Hüpſch à Cologne, en lui payant 600 florins d'Hollande, ſavoir:

I. Lactantius Firmianus de divinibus inſtitutionibus: imprimé l'an 1465. Cet ouvrage eſt *in ſolio*: les lettres initiales ſont dorées & colorées, & les inſcriptions des chapitres manuſcriptes

II.

II. Officia et Paradoxa Ciceronis : imprimé ſur du parchemin l'an 1466. À la tête de chaque chapitre eſt un court ſommaire imprimé en caracteres rouges. Les chapitres ne ſont pas numerottés, & les lettres initiales ſont peintes en différentes couleurs. Enſuite

Une collection conſidérable de livres, tant nouveautés que continuations que Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait acheter chez les libraires.

Les autres acquiſitions ſe trouvent marquées dans l'article: Ouvrages, machines & inventions &c. Voyez ci-deſſous pag. 12.

L'Académie a fait dans le courant de l'année une perte de deux de ſes membres externes qui ſont:

I. M. l'Abbé Leonhard Ximénes, Premier Mathématicien & Ingénieur du Grand Duc de Toſcane: reçu au nombre des Aſſociés externes le 5 Mars 1764, & mort dans ſa 68eme année.

II. M. Jean-Gottlieb Gleditſch, Docteur en Médecine & Profeſſeur de Botanique du College Royal de Médecine & de Chirurgie. Directeur du jardin académique & Intendant de l'apoticairerie de la cour à Berlin, où il eſt décédé le 5 Octobre n. ſt. Il a été de pluſieurs Académies: l'Académie Impériale des Sciences l'a reçu en 1776, le jour de la célébration de ſon jubilé de 50 ans.

Le nombre des receptions a été d'autant plus conſidérable. D'abord Madame la Princeſſe de Daſchkaw, ayant trouvé bon de faire, en faveur des quelques ſavans diſtingués une excep-

exception à la loi qu'elle s'étoit préſcrite en 1784, de ne plus recevoir de membre étranger, avant que leur nombre n'ait été conſidérablement diminué; elle propoſa le 9 Janvier.

M. Jean-George Zimmerman, Docteur en Médecine & Médecin du Corps de S. M. le Roi de la Grande Brétagne à Hannover, depuis chevalier de l'Ordre de St. Wolodimer de la 3e Claſſe. Son agrégation au nombre des Académiciens externes s'eſt fait unanimement. Enſuite le 23 Octobre:

M. Abraham-Gotthelf Kaeſtner, Conſeiller de Cour & Proféſſeur ordinaire de Mathématique & de Phyſique à l'Univerſité de Götingue, qui a encore été reçu d'une voix unanime; &

M. Lorenz Crell, Conſeiller de Mines, Docteur & Profeſſeur de Médécine à Helmſtädt; dont la reception au nombre des Académiciens externes s'eſt fait par la pluralité des voix.

Outre ces agregations furent propoſés & reçus.

Dans la Claſſe des Académiciens libres regnicoles.

M. François Hermann, Conſeiller de Cour & Directeur de la fabrique d'acier à Catharinenbourg, dans le Gouvernement de Perme, ci-devant Correſpondant penſionaire de l'Académie: propoſé par Madame la Princeſſe de Daſchkaw le 18 Septembre, & reçu par la pluralité des voix.

Dans la Claſſe des Correſpondans étrangers.

Le 23 Mars. M. l'Abbé Soulavie à Paris: auteur du mémoire qui a obtenu le ſecond acceſſit ſur la queſtion minéralogique propoſée pour le Prix de 1785: &

Le 5 Juin. M. Jean Philippe de Caroſi, Capitaine au ſervice du Roi & de la Republique de Pologne à Mogila près de Cracovie.

Enfin au nombre des Correſpondans regnicoles.

M. Waſile Kreſtinin, citoyen d'Archangel, connu par une hiſtoire des anciens habitans d'Archangel imprimée avec approbation & aux depens de l'Académie; envoyant au reſte des articles fort intéreſſans aux Académiciens éditeurs des Новыя ежемѣсячныя сочиненія. (*) Reçu unanimement ſur la propoſition de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, le 2 Octobre.

M. le Prof. Georgi ayant achevé la redaction des papiers du defunt Prof. Falck, & ſoigné leur impreſſion en trois volumes in 4[to], Madame la Princeſſe de Daſchkaw pour le recompenſer de ſes peines, ainſi que de ſa bonne diſpoſition à ſe charger encore à l'avenir de la publication des ouvrages allemands qui ſont de ſon reſſort, lui a accordé une augmentation de gages de 200 roubles par an.

S. E. a encore gratifié M. le Lieutenant Colonel de Renovance, Correſpondant de l'Académie, de la penſion académique de 200 roubles par an, qui lui furent payés du jour même qu'il a commencé à travailler à l'arrangement du Cabinet minéralogique.

Elle

(*) C'eſt le titre d'un Journal, qui paroit tous les mois & qui contient des articles hiſtoriques & inſtructifs, des pieces de vers, & des nouvelles intereſſantes en tout genre.

Elle a enfin augmenté les appointemens de Mrs. les Académiciens & Conſeillers de Cour Inochodzof & Ozeretskofski.

Le Secrétaire perpétuel de Conférences Jean-Albert Euler ayant été recommandé par Madame la Princeſſe de Daſchkaw, pour obtenir la croix de St. Wolodimer, le Chapitre le mit ſur la liſte des Chevaliers de la quatrieme Claſſe, & Sa Majeſté eut la grace de le revetir de cet ordre le 22 Septembre, anniverſaire du couronnement de Sa Majeſté l'Impératrice & de l'inſtallation de l'Ordre.

OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRIPTS, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS DE LA NATURE ET DE L'ART, ANTIQUITÉS ET CURIOSITÉS, préſentés ou donnés à l'Académie, en l'année 1786.

Le Vendredi 9 Janvier. S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a remis de la part de Sa Majeſté l'Impératrice, pour être dépoſé au Cabinet académique, la médaille d'or frappée en mémoire du célébre Capitaine Cook, que la Société Royale des Sciences à Londres avoit fait préſenter à Sa Majeſté avec une lettre latine, écrite avec beaucoup d'élégance, & datée du 1er Juin 1784.

Madame la Princeſſe a encore remis dans cette même Séance une paire de pendans d'oreilles, antique & artiſtement travaillée en or: elle a été trouvée en terre à Bolgaray, dans le Gouvernement de Caſan, & Sa Majeſté l'Impératrice en a fait préſent au Cabinet académique.

M. Jean-Albert Euler, Secrétaire des Conférences académiques, a préſenté de la part de l'auteur, M. J. E. Bode Aſtronome de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe: *Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr* 1788 *nebſt einer Sammlung der neueſten in die aſtronomiſchen Wiſſenſchaften einſchlagenden Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten u. ſ. w.* &

&. de la part du College Illuſtre à Anſpach, cinq Discours imprimés ſur divers ſujets de Pédagogie.

Le 12 Janvier. M. l'Adjoint Zouyef a préſenté le 1er Tome de ſon éſſay d'hiſtoire naturelle, composé en ruſſe à l'uſage des écoles nationales: начертаніе Естественной Исторіи.

Le 19 Janvier. Le Secrétaire a lu des lettres de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datées de Talzinsk près d'Irkoutz, qui communique diverſes obſervations intéreſſantes & curieuſes ſur le *Lapis Lazuli*, & la congélation naturelle du mercure à Yakoutzk': il a auſſi envoyé pluſieurs ſemences pour le jardin botanique, & quelques pierres à demi-transparentes, qu'il croit être des productions volcaniques: enfin une déſcription de la riviere Amur, qui à l'exception de quelques éclairciſſemens ſur les frontieres, s'eſt trouvée ne contenir rien qui ne ſoit déja inſéré dans l'ouvrage de feu M. Müller, intitulé *Sammlung ruſsiſcher Geſchichte.* Cette déſcription écrite en langue ruſſe eſt d'un vieillard de 80 ans, nommé Lindenau, qui a encore été employé dans la premiere expédition de Kamtſchatka en 1737.

Le 23 Janvier. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur: *Lithophylacium Mitiſianum diſſertatione praevia et obſeruationibus perpetuis phyſico-mineralogicis explicatum, a Francisco Guſsmann.* Voyez l'hiſtoire de 1783, pag. 39. au 22 Août.

—— —— il a lu une lettre de M. le Prof. Charles Barletti, datée de Pavie le 14 Juillet 1785, qui envoie quatre tomes de ſa *Fiſica particolare et generale in ſaggi altri analitici altri elementari.*

Le 26 Janvier. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſeiller des Mines Müller à Halle les ouvrages imprimés ſuivans :

Richtiger Gebrauch des Blei-extracts in äuſſerlichen Zuſällen.

Neuer Unterricht für Wundärzte. Von einer Geſellſchaſt von Wundärzten zum allgemeinen Beſten herausgegeben, 1ter Theil.

Theoretiſche und practiſche Wundarzneikunſt für unſere Zeiten; oder Calliſſens Grundſätze der gantzen Chirurgie zum allgemeinen Gebrauch eingerichtet.

qui avoient déja été annoncés à l'Académie le 7 Nov. 1785.

—— —— il a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée de Talzinsk' le 2 Décembre, qui communique les degrés de grand froid obſervés à ſon Thermomètre le cinq derniers jours de Novembre, & qui envoie pour le jardin botanique quelques ſemences, cueillies dans le deſert de Daurie, aux environs du fleuve Onon.

M. l'Adjoint Zouyef a lu une lettre de M. le Docteur Ambodik, Profeſſeur à l'Inſtitut des accouchemens, qui envoie ſes ouvrages, intitulés comme il ſuit :

Врачебное веществословіе, или описаніе цѣлительныхъ растѣній въ пищу и лѣкарства употребляемыхъ. Книга I. и II.

Руководство къ познанію и врачеванію болѣзней человѣческихъ наружныхъ и внутренныхъ ч. I. II.

Краткое испытаніе многихъ закоснѣлыхъ мнѣній и злоупотребленій до беременныхъ женщинъ и пр.

Анатомико-Физіологическій Словарь.

Le

Le 6 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliotheque, le nouveau réglement pour les Gouvernemens, traduit & imprimé en langue tartare, à l'imprimérie du Senat chez Schnoor. 4to.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. Anton Lingenhoely, datée de Conſtantinople le 1er Janvier, qui envoie pour être préſenté & ſousmis à l'examen de Mrs. les Académiciens: *Algebraiſcher Verſuch über die Quadratur des Cirkels.* L'auteur y donne des ſeries infinies & aſſés convergentes pour la longueur des arcs de Cercle, mais qui ne ſont pas neuves. Cependant comme il les a trouvées de ſon propre fond, ſon eſſay ne manque pas de faire honneur à ſon génie mathématique.

Le 13 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé divers foſſiles trouvés en Permie, dont elle fait préſent au Cabinet de l'Académie, & parmi lesquels ſe trouvent des pierres d'alliance, des topazes enfumées, des amethyſtes, & d'autres pierres, remarquables tant par leur rareté & beauté que par leur volumes.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Lalande datée de Paris le 27 Janvier, qui envoie les dernieres obſervations des Satellites de Jupiter & des occultations faites par M. Mechain à Paris, & qui prie l'Académie de lui communiquer réciproquement celles qui ont été inſtituées en dernier lieu par Mrs. Inochodzof & Tſchernoi pour la détermination géographique de divers lieux de la Ruſſie: ce qui fut accordé.

Le 2 Mars. M. le Conſeiller de Cour Lepechin a donné pour le Cabinet des curioſités, une échelle de bois repréſentant

tant un Calendrier perpétuel dont ſe ſervent les habitans de la Carelie, & un os fracturé d'un morſe recouvert de calus.

Le même 2 Mars, le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. le Prof. Bode à Berlin, reçu au nombre des Correſpondans étrangers.

Le 6 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Hemmer, Conſeiller eccleſiaſtique & Secrétaire perpétuel de la Société Électorale de Météorologie à Mannheim, qui envoie une brochure intitulée : *Anleitung Wetterleiter an alle Gattungen von Gebäuden auf die ſicherſte Art anzulegen.*

—— —— une lettre de M. Lamey, Secrétaire perpétuel de l'Académie Électorale des Sciences de la même ville, qui envoie le programme des nouvelles queſtions propoſées par cette Académie pour leurs Prix annuels.

Le 9 Mars. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliotheque académique les deux ouvrages ſuivans :

Записки надлежащїя до Исторїи наукъ, художествъ, нравовъ, обычаевъ, и пр. Китайцевъ. Томъ I.

Растущїй Виноградъ 1785го года съ Апрѣля по Апрѣль же мѣсяцъ сего 1786го года.

Les cahiers ſuivans de ce dernier ouvrage périodique ont été dans la ſuite préſentés régulierement par M. l'Adjoint Zouyef.

Le 16 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Profeſſeur Camper, datée de Leewarden le 10 Février, qui remercie

remercie l'académie du préſent de quelques os foſſiles, qu'elle lui a fait l'année derniere.

Le 20 Mars. M. l'Adjoint Zouyef a préſenté le ſecond Tome de l'Hiſtoire naturelle, qu'il a fait imprimer à l'uſage des écoles nationales. Voyez le 12 Janvier.

Le 23 Mars. Mad. la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé une collection de 19 pieces choiſies & très belles de cryſtalliſations & pétrifications, reçues des païs étrangers & en partie de Derbyshire en Angleterre, dont elle fait préſent au Cabinet académique.

Le 27 Mars. Le Secrétaire a ouvert un pacquet adreſſé à l'Académie par M. le Conſeiller de Cour Gerngroſs, Préſident au Magiſtrat de Pleskow, qui envoie des pierres gypſeuſes de différentes eſpèces, dont il a decouvert une carriere à Lopotowa, village près de l'ancienne ville d'Isbourg.

Le 3 Avril. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſeiller de Cour Hermann à Catharinenbourg: *Beſchreibung der Permiſchen Statthalterſchaft.* L'Académie en a fait inſérer une traduction ruſſe dans le Calendrier hiſtorique de 1787.

—— —— il a lu la lettre de remerciment de M. Haidinger, Garde-Adjoint du Cabinet Impérial d'Hiſtoire naturelle à Vienne, qui a remporté le Prix de Minéralogie pour 1785.

Le 20 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé un grand & très précieux morceau de la mine de fer chatoyante, qu'on trouve à l'isle d'Elbe aux côtes de la Toscane,

cane, ainſi que d'autres foſſiles avec pluſieurs incruſtations, empreintes & pétrifications de Bruxelles, dont elle a fait préſent au cabinet de l'Académie.

Ce même 20 Avril. Le Secrétaire a remis de la part de la Société libre économique le 36e Tome de ſes mémoires ou le 6me de la continuation de cet ouvrage: Продолженіе трудовъ Вольнаго Экономическаго Общества ч. VI.

Le 24 Avril. Le Secrétaire a communiqué une lettre de Mlle. Le Maſſon-le-Golft, Académicienne du Cercle de Philadelphe, datée de Havre-de-Grace le 10 Mars, & adreſſée à Mad. la Princeſſe de Daſchkaw: elle envoie un Mappemonde, qui repréſente le tableau du genre humain, indiquant par des couleurs & des caracteres, le Phyſique auſſi bien que le Moral des habitans des diverſes contrées de la Terre.

Le 4 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé une collection de papillons de la Guinée en quatre boetes, dont elle fait préſent pour le cabinet d'hiſtoire naturelle.

Le Secrétaire a ouvert un pacquet adreſſé à l'Académie, qui contenoit avec une incluſe pour Sa Majeſté l'Impératrice, deux exemplaires d'un imprimé intitulé: *Explication de la planche qui repréſente pluſieurs variétés de la pierre aux étoiles mouvantes, ainſi que ſa cryſtalliſation, par Pierre Laporterie, Bourgeois de la ville de Hambourg, auteur de la découverte, & poſſeſſeur des pierres aux étoiles mouvantes à ſix rayons, ainſi que des deux collections dont il eſt fait mention dans une note*; ſans aucune lettre de l'auteur pour l'Académie. Un de ces deux exemplaires a été dépoſé à la Bibliotheque, & l'autre

tre avec la lettre à l'Impératrice a été donné à Madame la Princeſſe de Daſchkaw.

Le 11 Mai. Sa Majeſté l'Impératrice a envoyé un exemplaire proprement relié du dernier ouvrage de M. Scopoli: *Deliciae Florae et Faunae Inſubricae Tom. I.* qui Lui avoit été préſenté de la part de l'auteur.

Le 25 Mai. M. le Comte de Segur, Miniſtre de la Cour de France, a envoyé de la part de M. l'Abbé Rochon de Paris une boëte contenant 1.) trois miroirs précieux de platine fondue, ſavoir un grand pour un teleſcope de 16 pouces de longueur avec le petit qui y appartient, & un troiſieme miroir plan perfectionné 2.) un enchantillon de platine malléable forgée rouge & laminée 3.) un prisme de cryſtal d'Islande & 4.) un prisme achromatique de deux cryſtaux de roche. Voiés la lettre ci-deſſous pag. 33.

—— —— de la part de M. Antoine Joſeph Cavanilles, Gouverneur des Princes de l'Infantado: *Diſſertatio botanica de Sida & de quibusdam plantis quae cum illa affinitatem habent. Pariſiis* 1785.

Le 5 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Abbé Rochon datée de Paris le 6 Mai, rélative à ſon envoi de miroirs & de prismes, dont il a été fait mention ci-deſſus.

Le 12 Juin. Le Secrétaire a préſenté.

1.) de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris: *Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences. Année* 1782, *avec les mémoires de Mathématiques & de Phyſique pour la même année.*

2.) de

2.) de la part de la Société Électorale Palatine de Météorologie : *Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Obſeruationes anni* 1784.

3.) de la part des éditeurs Mrs. l'Abbé Rozier, Mongez le jeune & de la Metherie : *Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts* : *année* 1785, *les mois de Novembre & de Décembre.*

4.) de la part de M. le Profeſſeur Zimmermann à Brounſwig, les ouvrages ſuivans :

Curuarum imbricatarum conſideratio analytica, 8vo *Göttingae* 1765.

Beobachtungen auf einer Harzreiſe nebſt einem Verſuche die Höhe des Brockens durch das Barometer zu beſtimmen. 8vo *Braunſchweig* 1775.

Specimen Zoologiae Geographicae, quadrupedum domicilia & migrationes ſiſtens. 4to *Lugduni Batav.* 1777.

Geographiſche Geſchichte des Menſchen und der allgemein verbreiteten vierfüſſigen Thiere 8vo *Leipzig* 1778 —— 1783. *Trois volumes.*

Déſcription d'un embryon d'Elephant, accompagnée de quelques nouvelles obſervations ſur l'hiſtoire naturelle de ce quadrupede 4to *Erlang* 1783.

Le 15 Juin. Le Secrétaire a lu des lettres de M. le Conſeiller de Cour Laxmann datées d'Irkutzk' le 8 & 22 Avril. La premiere contient une inſtruction ſimple & fort aiſée d'empacqueter toutes ſortes de plantes, pour être envoyées & transplantées dans d'autres pais, ſans riſquer qu'elles periſſent en

en chemin. La ſeconde lettre donne une notice du quadrupede ſauvage nommé *Dſchigitaie*, dont il ſe trouve ſept vivans à Tſchindan.

Le 22 Juin. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſeiller de Cour Hermann: *Memoire ſur les naiſſances, mariages, & morts dans quelques provinces & villes de Ruſſie.*

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a communiqué une lettre de M. l'Amiral Greig, rélative à un eſſay fait à Cronſtadt, de rendre potable l'eau de mer au moyen d'un appareil nommé *Ships Cambuſe*, inventé & nouvellement envoyé à l'Amirauté par M. de Magellan. M. l'Amiral avoit auſſi joint à ſa lettre une bouteille d'une telle eau adoucie obtenue par la dite machine, qui fut paſſablement deſſalée & potable, quoique l'eau de mer dont elle a été tirée, avoit déja contracté un haut degré de putridité.

M. le Prof. Fuſs a préſenté de la part de M. Schubert Géographe de l'Académie: *Solutio Problematis ſphaerici*: cet écrit a mérité les éloges de Meſſieurs les Mathématiciens.

Le 26 Juin. Le Secrétaire a ouvert une lettre adreſſée à l'Academie, qui contenoit une quadrature de cercle ſignee Guyard & datée de Paris le 9 Juin. Elle a été miſe au rebut, ainſi qu'une ſeconde lettre du même Auteur datée du 26 Juin.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour être préſenté de la part de l'auteur: *Abhandlung über eine neue Methode zu integriren von Johann Freyherrn von Paccaſſi.* 8vo *Wien* 1786.

Le 3 Juillet. M. le Prof. Fuſs a préſenté une exemplaire de la traduction allemande de l'Éloge de M. Léonard Euler, qu'il avoit faite, à la réquiſition du Souverain Conſeil de la ville de Bâle, & que les Chefs de cette République avoient fait imprimer avec toute l'élégance typographique & diſtribuer à tous les membres du Sénat & de l'Univerſité, pour honorer la mémoire d'un grand homme qui a jetté tant de luſtre ſur ſa patrie.

Le 6 Juillet. M. le Prof. Géorgi a préſenté ſa traduction allemande de l'ouvrage de M. Rinmann ſur le fer, publié en Suedois: *Verſuch einer Geſchichte des Eiſens für Gewerbe und Handwerker.* Deux volumes in 8vo.

Le 10 Juillet. Le Secrétaire a remis à Meſſieurs les Académiciens de la claſſe Phyſicale onze mémoires, qui jusqu'au premier de ce mois avoient été envoyés à l'Académie pour concourrir au Prix propoſé ſur la Théorie de la nutrition.

—— —— il a communiqué la déſcription d'un nouveau Baromètre, perfectionné par M. Giò Batta. Schiavetto à Berlin & très propre à méſurer les hauteurs.

Le 14 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Pierre Laporterie, datée de Hambourg le 30 Juillet, qui envoie deux planches repréſentant le Hériſſon ſolaire & la pierre qui le produit, avec une explication imprimée, & la copie de la lettre que l'auteur avoit écrite ſur cet objet à la Société Royale de Londres. Voyez le 4 Mai.

—— —— il a préſenté: *Anleitung zur Verbeſſerung der Pferdezucht ganzer Länder und einzeler Privatwirthe u. ſ. w. von Georg Hartmann. Zweyte Auflage, Tübingen* 1786, un volume in 8vo, avec une lettre de l'auteur datée de Stuttgardt le 25 Avril.

M.

M. le Prof. Géorgi ayant été chargé de lire cet ouvrage hippiatrique, il a en fait un rapport très avantageux.

Ce même 14 Août. M. le Prof. Fuſs a préſenté de la part du Géographe Schubert, un mémoire *de curua loxodromica*, que l'auteur ſousmet au jugement de l'Académie. Meſſieurs les Académiciens Kotelnikof & Roumovski ayant été chargés de l'examiner en ont fait à une des ſéances ſuivantes un rapport fort favorable.

Le 17 Août. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Société Royale des Sciences de Gottingue: *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingenſis Tom. VI. ad A.* 1783 *&* 1784. *Tom. VII. ad A.* 1784 *&* 1785. Et de la part des auteurs:

Caroli Allionii Flora Pedemontana in folio. Tom. I. & II. avec 92 Planches.

Trigonometria piana e sferica di Antonio Cagnoli. 4.

An Weickard. Lettre de M. le Prof. Kohlreif concernant un mémoire imprimé de M. le Prof. Beſeke à Mitau intitulé: *über Elementar-Feuer und Phlogiſton, als Uranfängen der Körper-Welt, insbeſondere über electriſche Materie.* 8vo.

Godofredi Alberti Kohlreifii Animaduerſiones criticae in disſertationem de caloris et frigoris modificationibus e ſchola medico-chirurgica nuper diuulgatam. 4to.

Le 21 Août. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Paris:

Mémoires de Mathématique & de Phyſique préſentés à l'Académie royale des Sciences par divers ſavans, & lus dans ſes Aſſemblées. Tom. X. & XI. Paris 1785.

Connoiſſance des temps pour l'année Biſſextile 1788.

&

& de la part des auteurs:

La Continuation des *Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'Hiſtoire naturelle & ſur les Arts, par Meſſieurs l'Abbé Rozier, Mongez le jeune & de la Métherie.*

Discours ſur la Douceur par M. de la Lande. 2[de] Edition. Bourg-en-Breſſe. 1786.

Le même 21 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller Privé Formey, datée de Berlin le 19 Août, qui communique des particularités fort interéſſantes de la mort du Roi Fréderic II. de Pruſſe, que l'Académie a eu la gloire de compter au nombre de ſes Honoraires depuis la célébration de ſon Jubilé en 1776, & qui a été le Reſtaurateur & le Protecteur de ſon Académie des Sciences & Belles-Lettres à Berlin.

Le 24 Août. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté l'Impératrice, pour être dépoſé à la Bibliotheque academique: *Cosmographie élémentaire diviſée en parties Aſtronomique & Géographique*, que l'auteur, M. Mentelle Hiſtoriographe du Comte d'Artois, avoit fait préſenter à Sa Majeſté.

—— —— M. le Conſeiller de Colleges & Chevalier Pallas a préſenté de la part de l'auteur: *Ueber das Anquicken der Gold- und Silberhaltigen Erzte, Rohſteine, Schwartzkupfer und Huttenſpeiſe von Herrn Ignaz Edeln von Born.* 4[to] *Wien* 1786.

—— —— Le même a remis de la part de S. E. Mr. le Comte de Besborodko un tiſſu fort curieux fait par des chenilles, que Sa Majeſté l'Impératrice a reçu de Moscou, & envoyé à l'Académie pour être conſervé à ſon cabinet d'Hiſtoire

ſtoire naturelle. Le Chevalier Pallas y a joint une notice ainſi que quelques fragmens d'un tiſſu pareil, qu'il avoit cueillis à St. Pétersboug, il y a quelques années. Voyés ci - deſſous pag. 34.

Le même 24 Aout. Le Secrétaire a lu encore une lèttre de M. Laporterie, datée de Hambourg le 16 Avril, qui envoie & ſousmet à l'examen de l'Académie un manuſcript intitulé: *Développement général du tiſſu du Saphir Cryſtal, fondé ſur un calcul poſitif de formation naturelle & démontré par l'analyſe d'un modèle artificiel, qui fournit à l'oeil & à la mémoire, la facilité de combiner les reſſorts optiques de cette pierre dans toute l'étendue de ſon interieur, relativement aux viſions capitales qui s'effectuent directement à l'extérieur, par l'addition naturelle d'une ſeconde maſſe.*

Le 28 Août. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de M. le Conſeiller d'Etat actuel de Demidof de Moscou: *Enumeratio plantarum ordine alphabetico undique collectarum ex quatuor plagis mundi, adiecta Botanicorum characterum deſcriptione, quae in horto Procopii a Demidof Conſil. Status act. Mosquae vigent.*

—— —— de la part de M. le Conſeiller d'Etat actuel de Krapovitzki, pour être communiqué par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice: *Obſervation des eclipſes de la Lune & du Soleil faite à Ochotsk le 4 & le 19 Janvier*, extraite d'un rapport de M. le Gouverneur-Général & Chevalier Jacobi, datée d'Irkutzk le 1 Juillet.

—— —— Le Secrétaire a remis quatre annonces de ſouscription: M. Voigt à Weimar, Secrétaire des mines, offre dans la premiere une collection complette des roches

qu'on trouve dans les mines de Saxe, avec un catalogue raiſonné & un exemplaire des lettres minéralogiques du même auteur, pour ceux qui ne les poſſedent pas déja. Dans la ſeconde M. Laſius, Officier des Ingénieurs à Hannovre, offre une pareille collection des roches différentes du Harz, avec un ouvrage qui s'y rapporte & une carte exacte des montagnes & mines de cette contrée. Dans la troiſieme M. de Burgsdorf, Conſeiller des forêts à Tegel près de Berlin, s'engage d'envoyer aux amateurs, par voye de prénumération, une collection de ſemences d'arbres tant exotiques qu'indigenes avec leurs dénominations botaniques & une inſtruction détaillée de leur culture & uſage. Enfin la quatrieme annonce eſt d'une gazette politique que M. Fabri, Profeſſeur à Halle, ſe propoſe de publier ſous le titre, *Allgemeine politiſche Zeitung für alle Stände*. L'Académie n'a ſouscrit que pour les deux Collections de roches.

Le 31 Août. Le Secrétaire a remis un pacquet, adreſſé à l'Académie, qui contenoit un écrit ſur la péſanteur des corps, en allemand avec une traduction latine, qui ne mérita aucune attention.

Le 11 Septembre. M. l'Amiral Greig, honoraire de l'Académie, a envoyé le modele d'une cuiſine portative, fort profitable pour s'en ſervir ſur mer, inventée par M. de Magellan & jointe à un appareil pour deſſaler l'eau de mer & la rendre potable, avec une inſtruction imprimée publiée par l'inventeur. C'eſt ce même appareil nommé Ships Cambuſe dont il a été fait mention à la page 21.

Le Secrétaire a lu une requête du maître ſerrurier Voelker, qui envoie & ſousmet à l'examen de l'Académie un tourne-broche à fumée de ſon invention, ſans rouage & d'une conſtruction très ſimple, en faiſant auſſi mention d'une machine

chine pour raboter des lizieres de fer, qu'il a inventée il y a quelques années, & dont il s'eſt ſervi avec ſuccés & avantage pour ratiſſer les chaſſis des fenètres du Palais de marbre, qui ſont en fer. Cette machine a enſuite été executée en grand ſous la direction de M. le Colonel Euler, à la fabrique de Siſterbec, où par ſon moyen ont été travaillés tous ces ponts de fer & ces treillages qu'on admire aux jardins de Sarskoe-ſelo. Mrs. les Académiciens Krafft, Fuſs & le Secrétaire ayant été chargé d'examiner ces machines inventées par le Sieur Voelker, en ont fait depuis un rapport très favorable à l'Académie.

Ce même 11 Septembre le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. le Capitaine de Caroſi à Mogila près de Cracovie, reçu au nombre des correſpondans étrangers. M. de Caroſi y communique ſes idées & expériences ſur une transmutation du gypſe en calcedoine, & envoie une collection de minéraux des environt de Cracovie, parmi lesquels ſe trouvent pluſieurs échantillons d'un gyps imparfaitement calcedoniſé, qui expoſés à l'air doivent ſe métamorphoſer entiérement. M. le Prof. Géorgi a été chargé de vérifier cette transmutation, & l'Académie lui a pour cet effet remis quelques pieces de ce gyps imparfaitement calcedoniſé, qu'elle venoit de recevoir de M. de Caroſi.

Le 18 Septembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé en préſent, pour être dépoſé au cabinet de Phyſique, un thermomètre de Wedgwood, propre pour méſurer & comparer entr'elles les plus fortes chaleurs.

Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur, M. de Fer de la Nouerre, ancien Capitaine d'Artillerie & Académicien correſpondant de diverſes Académies:

 1.) *La*

1.) *La Science des canaux navigables, ou Théorie générale de leur conſtruction.* Paris 1786. Deux volumes in 8vo.

2.) *Réflexions ſur le projet de l'Yvette, pour ſervir de Supplement à l'Ouvrage précédent.* Un volume in 8vo.

Le 21 Septembre. M. le Conſeiller de Colléges & Chevalier Pallas a préſenté de la part de la Societé Royale des Sciences de Londres: *Aſtronomical Obſervations made at the Royal Obſervatory at Greenwich A. 1775 —— 1782 by Nevil Maskeline Vol. II. in folio.* Et de la part des auteurs:

Meditationes analyticae ab Edvardo Waring, Regiae Societatis & Academiae Bononienſis Inſtituti Socio. 4to.

Nicol. Joſeph Edeln von Jacquin's K. K. Bergrath, Anfangs-Gründe der mediciniſch-practiſchen Chymie zum Gebrauch ſeiner Vorleſungen 8vo. 1783.

Annonce d'un Recueil univerſel de toutes les collections d'inſcriptions antiques, qui doit être publié ſous le tître: Vniuerſalis omnium epigraphicarum collectionum Συλλογην· *Par M. Cajetano Carcaris, Directeur de la Typographie royale à Naples;* avec priere de lui procurer des copies des inſcriptions qu'on trouve en Crimée.

Le 25 Septembre. Le Secrétaire a lu une lettre addreſſée à Mrs. de l'Académie par M. Bernard Martinius, Paſteur de l'égliſe hollandoiſe reformée à Archangel, qui envoie ſon ouvrage: *De Leer van de Eeuwighyd der helſche Straſſen.*

Le 28 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part des auteurs: *Phyſique du monde par M. le Baron de Marivetz & par M. Gouſſier. Tome IVe in 4to Paris* 1784.

Ce

Ce même 28 Septembre le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée de Talzinsk' près d'Irkoutzk' le 5 Août, qui envoie des obſervations faites à Ochotsk' de l'eclipſe de Soleil arrivée le 19 Janvier après midi, & des hauteurs thermomètriques annotées depuis le 1er Octobre 1785 jusqu'au 15 Mars 1786.

Le 5 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Collignon datée de Dieuze en Lorraine le 28 Août, qui envoie ſa brochure intitulée: *L'avant coureur du changement du monde entier par l'aiſance, la bonne éducation & la proſpérité générale de tous les hommes, où Proſpectus d'un mémoire patriotique ſur les cauſes de la grande miſere qui exiſte par tout & ſur les moyens de l'extirper radicalement, en VIII. Vol. in* 8vo *avec figures.* Cet envoi n'a mérité aucune réponſe.

Le 9 Octobre. Le Secrétaire a remis la 1re Section du Catalogue de la Bibliothéque du defunt Profeſſeur en langues orientales Charles Aurivillius à Upſala, contenant les *in folio* & *in* 4to.

M. l'Adjoint Bernoulli a préſenté de la part des auteurs:

Ricerche ſull' equazioni di terzo grado di Leonardo Salimbeni Capit. d'Ing. & Prof. di Math. nelle Scuole militari di Verona 8vo.

Opuſcoli di Geometria & Baliſtica di Leonardo Salimbeni 4to.

Nuove Ricerche ſull' equilibrio delle Volte dell' Abate Lorenzo Maſcheroni, Prof. di Filoſofia nel Collegio mariano. Bergamo 4to.

Le 16 Octobre. Le Secrétaire a préſenté un écrit intitulé : *Relatio de inſigni quadam emendatione in ſanandis variolis, ſiue de noua methodo hactenus inuſitata medendi iis per viam naturalem contractis : accedunt Teſtimonia varia feliciſſimas quasdam medicationes inopinatas fere habitas continentia, in praefixa ſerie memoratas*, que l'auteur M. le Docteur van den Boſch à la Haye a envoyé, pour être communiqué à l'Académie.

M. le Conſeiller de Cour Kotelnikof a expoſé un enfant monſtrueux avec des doubles extrémités & une tête à deux viſages, que le Gouvernement de Smolensk a envoyé à l'Académie pour ſon Cabinet anatomique.

Le Secrétaire a communiqué l'annonce de la vente du Cabinet de feu M. Abraham Gevers, ancien Bourguemaître de la ville de Rotterdam.

Le 26 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de M. le Baron de Hüpſch, demeurant à Cologne ſur le Rhin, une collection de foſſiles, pétrifications & minéraux qui ſe trouvent dans diverſes provinces de la Baſſe-Allemagne. M. le Baron y avoit joint neuf petites brochures, qu'il a publiées ſur divers ſujets d'économie, d'hiſtoire naturelle & d'antiquités, ainſique ſa lettre circulaire par laquelle il invite les ſavans d'entrer avec lui en correſpondance pour des échanges de productions de la nature & de l'art, qu'il offre.

Le 30 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait préſent pour le cabinet d'hiſtoire naturelle divers poiſſons & autres animaux marins empaillés & bien conſervés.

Le

Le 2 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'auteur M. de Pleſchtſcheyef: Обозрѣніе Россійскія Имперіи въ нынѣшнемъ ея новоустроенномъ состояніи.

Le 6 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Société Royale des Sciences de Londres:

Philoſophical Transactions of the royal Society of London Vol. LXXVI. for the Year 1786. Part. I.

A Collection of authentic tracts relating to ſome tale Diſputes in thie royal Societes.

Le 20 Novembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm: *Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar. Tom. VI. för År 1785. Jul. —— Decemb. Tom. VII. för År 1786. Jan. —— Junius.*

Le 23 Novembre. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis de la part de l'auteur: *Richardi Relhan, Flora Cantabrigienſis exhibens plantas agro cantabrigienſi indigenas, ſecundum ſyſtema ſexuale digeſtas.* 8vo *Cantabrigiae* 1785, avec un Supplement imprimé en 1786.

Le 4 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſeiller de Cour Hermann à Catharinenbourg, le premier volume de ſes *Beyträge zur Phyſik, Oekonomie, Mineralogie, Chemie, Technologie, und zur Statiſtik beſonders der ruſsiſchen und angränzenden Länder*: imprimé à Berlin in 8vo 1786.

—— —— de la part du Chirurgien Major Jacques Fries, des obſervations météorologiques faites à Uſtiug Welikoi depuis le

le 1e Janvier jusqu'au 6 Nov. 1786. Le mercure s'y eſt gélé le 4 Nov. à 3 heures du matin par un froid naturel de 34 degrés de Reaumur.

Le même 4 Décembre le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann datée de Talzinsk' le 30 Septembre, qui envoie divers échantillons de ſa verrerie, où il emploie au lieu de la Potaſſe, le ſel de Glauber qu'il mele avec le ſable, & qui donne un verre très bon & fort.

Le 11 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Docteur Arnemann, datée de Göttingue le 20 Octobre, qui envoie & ſoumet à l'approbation de l'Académie: *Verſuche über die Regeneration an lebenden Thieren: 1ſter Band, über die Regeneration der Nerven.* 8vo *Göttingen* 1786.

Le Secrétaire a continué de préſenter tous les mois les obſervations météorologiques faites à Berlin & à Moscou, que Mrs. l'Académicien Beguelin & le Conſeiller de Cour Chevallier Stritter lui ont communiquées.

Extrait

Extrait

de la lettre de M. l'Abbé Rochon, relative aux miroirs de platine & aux priſmes, préſentés à la Séance académique le 25 Mai 1786.

J'ai l'honneur de vous adreſſer pour l'Académie un ſyſteme de priſmes de cryſtal de roche, afin que les Aſtronomes puiſſent les faire adapter à leur lunettes, pour méſurer de petits angles, d'après la méthode que j'ai décrite dans mon ouvrage intitulé : *Recherches ſur la Mécanique & la Phyſique.* Vous y trouverez auſſi un priſme de cryſtal d'Islande. L'utilité de ce micromètre m'a fait eſpérer, que l'Académie voudroit bien me permettre de le lui adreſſer. J'y ai joint un grand & un petit miroir de platine pour un téleſcope de 16 pouces, & un petit miroir plan, encore plus parfait; ce miroir eſt déſtiné aux inſtrumens, qui ſervent aux marins à méſurer les angles. Il étoit deſtiné pour un cercle à réflexion de l'invention de M. le Chevalier de Borda, & qui eſt conſtruit ſur le même principe que l'Octant d'Hadley. Le petit morceau de platine malléable que j'ai ajouté à cet envoi, eſt encore une ſuite de mes recherches ſur la platine. J'aurai l'honneur d'envoyer à l'Académie le mémoire que j'eſpére publier bientôt ſur ce ſujet. Dés que j'ai pu me procurer de la platine en aſſés grande quantité pour faire des miroirs, je me ſuis occupé de cet important objet, plus encore pour les inſtrumens des marins, que pour les téleſcopes: parce qu'avec un

un peu de ſoin on peut éviter qu'ils ſe gâtent. Mais les marins ſont obligés de faire uſage de miroirs de verre & alors ils ne peuvent pas méſurer les diſtances de la Lune au Soleil, ou à une étoile avec tout le degré de préciſion que des obſervations auſſi délicates demandent : c'eſt pourquoi les miroirs de platine ſont ſi précieux. M. le Comte de Sickingen à fait ſur ce ſujet un très beau travail dont j'ai eu pleine connoiſſance ; mais les moyens que j'ai employés ſont très differens & bien moins coûteux. Le travail de M. Achard de Berlin ne m'a pas été inutile : mais mes recherches n'étant pas encore publiées, je vais en accélerer l'impreſſion pour faire paſſer le plutôt poſſible un exemplaire de mon ouvrage à l'Adémie.

Sur

Sur une production très curieuſe de chenilles, remiſe à l'Académie, par ordre de *Sa Majeſté Impériale*, le 25 Août 1786.

Le tiſſu curieux, envoyé de Moscou & préſenté à Sa Majeſté l'Impératrice, eſt le produit de deux eſpéces de petites chenilles qui ſe trouvent en ſociété ſur le cériſier à grappes, le fuſain & pluſieurs arbres fruitiers.

Dans nos provinces méridionales ces deux eſpéces fourmillent presque tous les ans ſur les petits bois d'arbres fruitiers ſauvages & les dégarniſſent quelquefois totalement de leurs feuilles, en les recouvrant de leurs tiſſus comme d'une tente. Comme elles vivent en trouppes de pluſieurs milliers, les tiſſus qu'elles tendent ſont ſouvent très conſidérables & elles les étendent de branche en branche, à meſure qu'elles en conſument les feuilles.

Ces chenilles produiſent de jolies petites phalénes en forme de teignes, d'un blanc argentin, avec des petits points noirs, & l'on en trouve la déſcription & la figure dans les mémoires ſur les inſectes de M. de Réaumur au Vol. II. Planche XII. fig. 5 à 9, Planche XIII. fig. 12 & 13.

M. le Conſeiller de Collèges Pallas rapporte avoir vu deux fois, il-y-a environ cinq ou ſix ans, une de ces eſpéces de petites chenilles ſi multipliée dans quelques jardins de la ville & des environs de St. Pétersbourg, que les arbres fruitiers ſe trouvoient en Mai & en Juin tout couverts de ces tentes de ſoye, & tout-à-fait dégarnis de feuilles & de fleurs. Il en avoit même recueilli dans ce temps quelques fragmens de ces toiles, dont il a fait voir à l'Académie quelques échantillons.

THEO-

SUPPLÉMENT.

MÉMOIRES

préſentés à l'Académie Impériale des Sciences

par divers Savans

&

approuvés dans ſes Aſſemblées.

THÉORÈME SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ;

par M. Lhuilier, Citoyen de Genève & Correſpondant de l'Académie, à Varſovie.

Préſenté à l'Académie le 26 Août. 1784.

Du centre commun de gravité d'un nombre quelconque de corps, ſoient menées des droites aux centres particuliers de gravité de chacun de ces corps; & ſoit priſe la ſomme des produits des quarrés de chacune de ces droites par les maſſes auxquelles elles ſont menées; ſoient joints deux à deux les centres de gravité particuliers de ces maſſes par des lignes droites & ſoit priſe la ſomme des produits des quarrés de ces droites par les quatrièmes proportionelles à la ſomme de toutes les maſſes & aux deux maſſes qu'elles joignent: ces deux ſommes ſont égales.

Symboliquement.

Soient A, B, C, D, ... L, M, N,

les centres de gravité d'un nombre quelconque de corps.

Soient a, b, c, d, ... l, m, n,

les maſſes de ces corps, dont la ſomme ſoit, pour abréger, deſignee par s. Soit Q leur centre commun de gravité

Je

Je dis: que

$$\begin{aligned}
& QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c + \ldots\ldots QL^2 \times l + QM^2 \times m + QN^2 \times n \\
& = AB^2 \times \tfrac{ab}{s} + AC^2 \times \tfrac{ac}{s} + \ldots\ldots AL^2 \times \tfrac{al}{s} + AM^2 \times \tfrac{am}{s} + AN^2 \times \tfrac{an}{s} \\
& \quad + BC^2 \times \tfrac{bc}{s} + \ldots\ldots BL^2 \times \tfrac{bl}{s} + BM^2 \times \tfrac{bm}{s} + BN^2 \times \tfrac{bn}{s} \\
& \quad \ldots\ldots CL^2 \times \tfrac{cl}{s} + CM^2 \times \tfrac{cm}{s} + CN^2 \times \tfrac{cn}{s} \\
& \quad \ldots + DL^2 \times \tfrac{\partial l}{s} + DM^2 \times \tfrac{\partial m}{s} + DN^2 \times \tfrac{\partial n}{s} \\
& \quad \vdots \\
& \quad + \ldots\ldots + LM^2 \times \tfrac{lm}{s} + LN^2 \times \tfrac{ln}{s} \\
& \quad + MN^2 \times \tfrac{mn}{s}
\end{aligned}$$

Lemme connu.

§. 1. Du centre commun de gravité d'un nombre quelconque de corps, ſoient menées des droites aux centres particuliers de gravité de chacun de ces corps, & ſoit priſe la ſomme des produits des quarrés de chacune de ces droites par les maſſes des corps auxquels elles ſont menées. De tout autre point, pris à volonté dans l'eſpace, ſoient auſſi menées des droites à tous ces centres de gravité (commun & particuliers), & ſoit priſe la ſomme des produits des quarrés des droites menées aux centres de gravité particuliers de ces corps par les maſſes des corps auxquels elles ſont réſpectivement menées: la ſeconde ſomme ſurpaſſe la première du produit de la maſſe de tous les corps par le quarré de la diſtance de leur centre commun de gravité au point pris à volonté.

Symbo-

Symboliquement.

Soient A, B, C, D, ... L, M, N, les centres de gravité d'un nombre quelconque de corps.

Soient a, b, c, d, ... l, m, n, leurs maſſes. Soit Q leur centre commun de gravité & P un point quelconque pris dans l'eſpace: on a l'équation

$$QA^2\times a + QB^2\times b + QC^2\times c + QD^2\times d + \ldots\ldots QL^2\times l$$
$$+ QM^2\times m + QN^2\times n + PQ^2(a+b+c+\ldots+l+m+n)$$
$$= PA^2\times a + PB^2\times b + PC^2\times c + PD^2\times d + \ldots\ldots$$
$$+ PL^2\times l + PM^2\times m + PN^2\times n.$$

Exemple I.

§. 2. Soient A et B les centres de gravité particuliers de deux corps. Soient a et b leurs maſſes et Q leur centre commun de gravité. Je dis: que

$$QA^2\times a + QB^2\times b = AB^2\times\frac{ab}{a+b}.$$

Démonſtration.

Le centre commun de gravité des corps a & b étant Q, on a $QA : QB = b : a$.

$$\text{Donc}\begin{cases}QA = AB\times\frac{b}{a+b}\\ QB = AB\times\frac{a}{a+b}\end{cases}$$

$$\text{Donc}\begin{cases}QA\times a = AB\times\frac{ab}{a+b}\\ QB\times b = AB\times\frac{ab}{a+b}\end{cases}\text{Donc,}$$

$$QA^2\times a + QB^2\times b = AB\times\frac{ab}{a+b}(QA+QB) = AB^2\times\frac{ab}{a+b}.$$

C. *q. f. d.*

Savoir: La ſomme des produits des maſſes de deux corps par les quarrés des diſtances de leurs centres particuliers de gravité à leur centre commun de gravité, eſt égale au produit du quarré de la diſtance de leurs centres particuliers de gravité par la 4me proportionnelle à la ſomme de leurs maſſes & à chacune d'elles.

Exemple 2.

§. 3. Soient A, B, C, les centres particuliers de gravité de trois corps. Soient *a*, *b*, *c*, les maſſes de ces corps & ſoit Q leur centre commun de gravité. Je dis: que

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c = AB^2 \times \frac{ab}{a+b+c} + AC^2 \times \frac{ac}{a+b+c} + BC^2 \times \frac{bc}{a+b+c}.$$

Démonſtration.

Soit Q' le centre commun de gravité des corps *a* et *b*, & l'on a par le §. 2,

$$Q'A^2 \times a + Q'B^2 \times b = AB^2 \times \frac{ab}{a+b},$$

mais (§. 1),

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b = Q'A^2 \times a + Q'B^2 \times b + Q'Q^2 (a+b),$$

donc

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b = AB^2 \times \frac{ab}{a+b} + Q'Q^2 (a+b),$$

donc

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c = AB^2 \times \frac{ab}{a+b} + Q'Q^2 (a+b) + QC^2 \times c.$$

Mais Q' étant le centre commun de gravité des corps *a* et *b* & Q étant le centre commun de gravité des corps *a*, *b*, *c*; Q eſt auſſi le centre commun de gravité de la maſſe $a+b$ placée en Q', & de la maſſe *c* placée en C. Donc, (§. 2),

QQ'^2

$$\overline{QQ'}^2 (a+b) + QC^2 \times c = \overline{CQ'}^2 \times \frac{c(a+b)}{a+b+c};$$

donc

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c = AB^2 \times \frac{ab}{a+b} + \overline{CQ'}^2 \times \frac{c(a+b)}{a+b+c},$$

mais (§. 1.)

$$CA^2 \times a + CB^2 \times b = Q'A^2 \times a + Q'B^2 \times b + Q'C^2 \times (a+b)$$
$$= AB^2 \times \frac{ab}{a+b} + \overline{CQ'}^2 (a+b), \text{ (§. 2.)},$$

donc

$$\overline{CQ'}^2 (a+b) = CA^2 \times a + CB^2 \times b - AB^2 \times \frac{ab}{a+b},$$

donc

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c = (CA^2 \times a + CB^2 \times b)$$
$$\times \frac{c}{a+b+c} + AB^2 \times \frac{ab}{a+b} \left(1 - \frac{c}{a+b+c}\right) =$$
$$AC^2 \times \frac{ac}{a+b+c} + BC^2 \times \frac{bc}{a+b+c} + AB^2 \times \frac{ab}{a+b} \times \frac{ab}{a+b+c} =$$
$$AB^2 \times \frac{ab}{a+b+c} + AC^2 \times \frac{ac}{a+b+c} + BC^2 \times \frac{bc}{a+b+c}. \text{ C. } q.f.d.$$

Savoir: La ſomme des produits des quarrés des diſtances du centre commun de gravité de trois corps à leurs centres particuliers de gravité par les maſſes de ces corps reſpectivement, eſt égale à la ſomme des produits des quarrés des diſtances des centres particuliers de gravité de ces corps pris deux à deux, par les quatriemes proportionelles à la ſomme des trois maſſes & aux deux maſſes dont le quarré de la diſtance eſt pris pour facteur.

Exemple 3.

§. 4. Soient A, B, C, D, les centres particuliers de gravité de quatre corps. Soient a, b, c, d, leurs maſſes & Q leur centre commun de gravité. Je dis: que

$$Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b + Q\,C^2 \times c + Q\,D^2 \times d =$$
$$A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b+c+d} + A\,C^2 \times \frac{ac}{a+b+c+d} + A\,D^2 \times \frac{ad}{a+b+c+d}$$
$$+ B\,C^2 \times \frac{bc}{a+b+c+d} + B\,D^2 \times \frac{bd}{a+b+c+d}$$
$$+ C\,D^2 \times \frac{cd}{a+b+c+d}$$

Démonſtration.

Soit Q′ le centre commun de gravité des corps a, b, c, on aura (par le §. 3).

$$Q'\,A^2 \times a + Q'\,B^2 \times b + Q'\,C^2 \times c = A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b+c}$$
$$+ A\,C^2 \times \frac{ac}{a+b+c} + B\,C^2 \times \frac{bc}{a+b+c},$$

mais (§. 1.),

$$Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b + Q\,C^2 \times c = Q'\,A^2 \times a + Q'\,B^2 \times b$$
$$+ Q'\,C^2 \times c + Q'\,Q^2\,(a+b+c),$$

donc

$$Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b + Q\,C^2 \times c = A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b+c}$$
$$+ A\,C^2 \times \frac{ac}{a+b+c} + B\,C^2 \times \frac{bc}{a+b+c} + Q'\,Q^2\,(a+b+c),$$

&

$$Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b + Q\,C^2 \times c + Q\,D^2 \times d$$
$$= A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b+c} + A\,C^2 \times \frac{ac}{a+b+c} + B\,C^2 \times \frac{bc}{a+b+c}$$
$$+ Q'\,Q^2\,(a+b+c) + Q\,D^2 \times d,$$

mais (§. 2),

$$Q'\,Q^2\,(a+b+c) + Q\,D^2 \times d = Q'\,D^2 \times \frac{d\,(a+b+c)}{a+b+c+d},$$

donc

$$Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b + Q\,C^2 \times c + Q\,D^2 \times d$$
$$= A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b+c} + A\,C^2 \times \frac{ac}{a+b+c} + B\,C^2 \times \frac{bc}{a+b+c}$$
$$+ Q'\,D^2 \times \frac{d\,(a+b+c)}{a+b+c+d},$$

mais (§. 1.),

$$\mathrm{D\,A^2} \times a + \mathrm{D\,B^2} \times b + \mathrm{D\,C^2} \times c$$
$$= \mathrm{Q'A^2} \times a + \mathrm{Q'B^2} \times b + \mathrm{Q'C^2} \times c + \mathrm{Q'D^2} \times (a+b+c)$$
$$= \mathrm{A\,B^2} \times \frac{a\,b}{a+b+c} + \mathrm{A\,C^2} \times \frac{a\,c}{a+b+c} + \mathrm{B\,C^2} \times \frac{b\,c}{a+b+c}$$
$$+ \mathrm{Q'D^2}\,(a+b+c)\ (\S.\ 3),$$

donc

$$\mathrm{Q'D^2}\,(a+b+c) = \mathrm{A\,D^2} \times a + \mathrm{B\,D^2} \times b + \mathrm{C\,D^2} \times c$$
$$- \left(\mathrm{AB^2} \times \frac{a\,b}{a+b+c} + \mathrm{AC^2} \times \frac{a\,c}{a+b+c} + \mathrm{BC^2} \times \frac{b\,c}{a+b+c}\right),$$

donc

$$\mathrm{Q\,A^2} \times a + \mathrm{Q\,B^2} \times b + \mathrm{Q\,C^2} \times c + \mathrm{Q\,D^2} \times d$$
$$= (\mathrm{A\,D^2} \times a + \mathrm{B\,D^2} \times b + \mathrm{C\,D^2} \times c) \times \frac{d}{a+b+c+d}$$
$$+ \left(\mathrm{AB^2} \times \frac{a\,b}{a+b+c} + \mathrm{AC^2} \times \frac{a\,c}{a+b+c} + \mathrm{BC^2} \times \frac{b\,c}{a+b+c}\right)\left(1 - \frac{d}{a+b+c+d}\right)$$

$$= (\mathrm{A\,D^2} \times a + \mathrm{B\,D^2} \times b + \mathrm{C\,D^2} \times c) \times \frac{d}{a+b+c+d}$$
$$+ \left(\mathrm{AB^2} \times \frac{a\,b}{a+b+c} + \mathrm{A\,C^2} \times \frac{a\,c}{a+b+c} + \mathrm{BC^2} \times \frac{b\,c}{a+b+c}\right) \times \frac{a+b+c}{a+b+c+d}.$$

$$= \mathrm{A\,B^2} \times \frac{a\,b}{a+b+c+d} + \mathrm{A\,C^2} \times \frac{a\,c}{a+b+c+d} + \mathrm{A\,D^2} \times \frac{a\,d}{a+b+c+d}$$
$$+ \mathrm{B\,C^2} \times \frac{b\,c}{a+b+c+d} + \mathrm{B\,D^2} \times \frac{b\,d}{a+b+c+d}$$
$$+ \mathrm{C\,D^2} \times \frac{c\,d}{a+b+c+d} \times$$
$$\times\ C.\ q.\ f.\ d.$$

Savoir: La ſomme des produits des quarrés des diſtances du centre commun de gravité de quatre corps à leurs centres particuliers de gravité par les maſſes de ces corps reſpectivement, eſt égale à la ſomme des produits des quarrés des diſtances de ces corps pris deux à deux, par les quatrièmes proportionnelles à la ſomme des maſſes dont le quarré de la diſtance eſt pris pour facteur.

§. 5. De même que la propoſition pour trois corps a été déduite de la propoſition démontrée pour deux corps, & que l'on eſt paſſé de trois corps à quatre : on paſſeroit de quatre corps à cinq, puis à ſix, ſept, &c. Et généralement: la propoſition étant ſuppoſée vraïe pour un nombre quelconque de corps, on démontrera qu'elle eſt vraïe pour un nombre de corps plus grand d'une unité.

Soient donc, A, B, C, D . . . . . L, M, les centres particuliers de gravité d'un certain nombre des corps, & ſoient, a, b, c, d . . . . . l, m, leurs maſſes. Qu'il ait été prouvé, que la ſomme des produits des quarrés des diſtances de leur centre commun de gravité à leurs centres particuliers de gravité, par les maſſes de ces corps réſpectivement, eſt égale à la ſomme des produits des quarrés des diſtances de ces corps pris deux à deux, par les quatrièmes proportionnelles à la ſomme de leurs maſſes & aux deux maſſes dont le quarré de la diſtance eſt pris pour facteur. Soit ajouté un corps dont la maſſe ſoit n & le centre de gravité ſoit N. Je dis : que la même propoſition a lieu pour ce nombre de corps plus grand d'une unité. Savoir: s étant la ſomme des maſſes de tous ces corps, & Q leur centre commun de gravité.

$$
\begin{aligned}
QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c + QD^2 \times d + \ldots QL^2 \times l + QM^2 \times m + QN^2 \times n \\
= AB^2 \times \tfrac{ab}{s} + AC^2 \times \tfrac{ac}{s} + AD^2 \times \tfrac{ad}{s} + \ldots AL^2 \times \tfrac{al}{s} + AM^2 \times \tfrac{am}{s} + AN^2 \times \tfrac{an}{s} \\
+ BC^2 \times \tfrac{bc}{s} + BD^2 \times \tfrac{bd}{s} + \ldots BL^2 \times \tfrac{bl}{s} + BM^2 \times \tfrac{bm}{s} + BN^2 \times \tfrac{bn}{s} \\
+ CD^2 \times \tfrac{cd}{s} + \ldots CL^2 \times \tfrac{cl}{s} + CM^2 \times \tfrac{cm}{s} + CN^2 \times \tfrac{cn}{s} \\
\ldots\ldots DL^2 \times \tfrac{d}{s} + DM^2 \times \tfrac{dm}{s} + DN^2 \times \tfrac{dn}{s} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\ldots\ldots + LM^2 \times \tfrac{lm}{s} + LN^2 \times \tfrac{ln}{s} \\
+ MN \times \tfrac{mn}{s}
\end{aligned}
$$

De-

Démonſtration.

Soit Q' le centre commun de gravité des corps a, b, c, d, ... l, m; & ſoit s' la ſomme de leurs maſſes. Par ſuppoſition :

$$Q'A^2 \times a + Q'B^2 \times b + Q'C^2 \times c + \ldots + Q'L^2 \times l + Q'M^2 \times m$$
$$= AB^2 \times \tfrac{ab}{s'} + AC^2 \times \tfrac{ac}{s'} + AD^2 \times \tfrac{ad}{s'} + \ldots + AL^2 \times \tfrac{al}{s'} + AM^2 \times \tfrac{am}{s'}$$
$$+ BC^2 \times \tfrac{bc}{s'} + BD^2 \times \tfrac{bd}{s'} + \ldots + BL^2 \times \tfrac{bl}{s'} + BM^2 \times \tfrac{bm}{s'}$$
$$+ CD^2 \times \tfrac{cd}{s'} + \ldots + CL^2 \times \tfrac{cl}{s'} + CM^2 \times \tfrac{cm}{s'}$$
$$\ldots + DL^2 \times \tfrac{dl}{s'} + DM^2 \times \tfrac{dm}{s'}$$
$$\vdots$$
$$\ldots\ldots + LM^2 \times \tfrac{lm}{s'}.$$

Mais (§. 1.).

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c + \ldots\ldots QL^2 \times l + QM^2 \times m =$$
$$Q'A^2 \times a + Q'B^2 \times b + Q'C^2 \times c + \ldots\ldots Q'L^2 \times l + Q'M^2 \times Q'Q^2 \times s'.$$

Donc

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c + \ldots + QL^2 \times l + QM^2 \times m + QN^2 \times n =$$
$$AB^2 \times \tfrac{ab}{s'} + AC^2 \times \tfrac{ac}{s'} + AD^2 \times \tfrac{ad}{s'} + \ldots + AL^2 \times \tfrac{al}{s'} + AM^2 \times \tfrac{am}{s'}$$
$$+ BC^2 \times \tfrac{bc}{s'} + BD^2 \times \tfrac{bd}{s'} + \ldots + BL^2 \times \tfrac{bl}{s'} + BM^2 \times \tfrac{bm}{s'}$$
$$+ CD^2 \times \tfrac{cd}{s'} + \ldots + CL^2 \times \tfrac{cl}{s'} + CM^2 \times \tfrac{cm}{s'}$$
$$\ldots + DL^2 \times \tfrac{dl}{s'} + DM^2 \times \tfrac{dm}{s'}$$
$$\vdots$$
$$\ldots\ldots + LM^2 \times \tfrac{lm}{s'}$$
$$+ Q'Q^2 \times s' + QN^2 \times n.$$

Mais (§. 2.).

$$Q'Q^2 \times s' + QN^2 \times n = Q'N^2 \times \tfrac{ns'}{n+s'},$$

&

& (§. 1.).

$$
\begin{aligned}
NQ'^2 \times s' = {} & NA^2 \times a + NB^2 \times b + NC^2 \times c + \ldots + NL^2 \times l + NM^2 \times m \\
& -(Q'A^2 \times a + Q'B^2 \times b + Q'C^2 \times c + \ldots + Q'L^2 \times l + Q'M^2 \times m) \\
= {} & NA^2 \times a + NB^2 \times b + NC^2 \times c + \ldots + NL^2 \times l + NM^2 \times m \\
& -(AB^2 \times \tfrac{ab}{s'} + AC^2 \times \tfrac{ac}{s'} + AD^2 \times \tfrac{ad}{s'} + \ldots + AL^2 \times \tfrac{al}{s'} + AM^2 \times \tfrac{am}{s'} \\
& \qquad + BC^2 \times \tfrac{bc}{s'} + BD^2 \times \tfrac{bd}{s'} + \ldots + BL^2 \times \tfrac{bl}{s'} + BM^2 \times \tfrac{bm}{s'} \\
& \qquad\qquad + CD^2 \times \tfrac{cd}{s'} + \ldots + CL^2 \times \tfrac{cl}{s'} + CM^2 \times \tfrac{cm}{s'} \\
& \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots + DL^2 \times \tfrac{dl}{s'} + DM^2 \times \tfrac{dm}{s'} \\
& \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots + LM^2 \times \tfrac{lm}{s'})
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c + \ldots + QL^2 \times l + QM^2 \times m + QN^2 + n = \\
& (NA^2 \times a + NB^2 \times b + NC^2 \times c + \ldots + NL^2 \times l + NM^2 \times m) \times \tfrac{n}{n+s'} \\
& + AB^2 \times \tfrac{ab}{s'} + AC^2 \times \tfrac{ac}{s'} + AD^2 \times \tfrac{ad}{s'} + \ldots + AL^2 \times \tfrac{al}{s'} + AM^2 \times \tfrac{am}{s'} \\
& \qquad + BC^2 \times \tfrac{bc}{s'} + BD^2 \times \tfrac{bd}{s} + \ldots + BL^2 \times \tfrac{bl}{s'} + BM^2 \times \tfrac{bm}{s'} \\
& \qquad\qquad + CD^2 \times \tfrac{cd}{s'} + \ldots + CL^2 \times \tfrac{cl}{s'} + CM^2 \times \tfrac{cm}{s'} \\
& \qquad\qquad\qquad \ldots + DL^2 \times \tfrac{dl}{s'} + DM^2 \times \tfrac{dm}{s'} \\
& \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots + LM^2 \times \tfrac{lm}{s'})(1 - \tfrac{n}{n+s'}).
\end{aligned}
$$

Donc, exécutant les multiplications, ſubſtituant à $s' + n$ ſa valeur s, & diſpoſant les termes ſuivant l'ordre alphabétique:

On

on obtient

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b + QC^2 \times c + \ldots + QL^2 \times l + QM^2 \times m + QN^2 \times n =$$

$$AB^2 \times \tfrac{ab}{s} + AC^2 \times \tfrac{ac}{s} + AD^2 \times \tfrac{ad}{s} + \ldots + AL^2 \times \tfrac{al}{s} + AM^2 \times \tfrac{am}{s} + AN^2 \times \tfrac{an}{s}$$

$$+ BC^2 \times \tfrac{bc}{s} + BD^2 \times \tfrac{bd}{s} + \ldots + BL^2 \times \tfrac{bl}{s} + BM^2 \times \tfrac{bm}{s} + BN^2 \times \tfrac{bn}{s}$$

$$+ CD^2 \times \tfrac{cd}{s} + \ldots + CL^2 \times \tfrac{cl}{s} + CM^2 \times \tfrac{cm}{s} + CN^2 \times \tfrac{cn}{s}$$

$$+ \ldots + DL^2 \times \tfrac{dl}{s} + DM^2 \times \tfrac{dm}{s} + DN^2 \times \tfrac{dn}{s}$$

$$\vdots$$

$$\ldots \ldots + LM^2 \times \tfrac{lm}{s} + LN^2 \times \tfrac{ln}{s}$$

$$+ MN^2 \times \tfrac{mn}{s}.$$

C. *q. f. d.*

Savoir : La ſomme des produits des quarrés des diſtances du centre commun de gravité d'un nombre quelconque de corps aux centres particulier de gravité de ces corps, par les maſſes de ces corps réſpectivement, eſt en effet égale à la ſomme des produits des quarrés des diſtances des centres particuliers de gravité de ces corps pris deux à deux, par les quatrièmes proportionnelles, à la ſomme de toutes les maſſes, & aux deux maſſes dont le quarré de la diſtance eſt pris pour facteur.

§. 6. En particulier, lorſque tous les corps ſont égaux entr'eux, la ſomme des quarrés des diſtances de leur centre commun de gravité à leurs centres particuliers de gravité eſt égale à la ſomme des quarrés des diſtances des centres particuliers de gravité de ces corps pris deux à deux, diviſée par le nombre des corps. Le nombre des premiers quarrés étant n & le nombre des derniers $\frac{n(n-1)}{2}$.

Or le centre d'une figure régulière eſt le centre commun de gravité de corps égaux dont les centres particuliers de gravité ſont aux ſommets de cette figure. Donc, dans toute figure régulière le quarré du rayon pris autant de fois que la figure a de ſommets, eſt égal à la ſomme des quarrés de tous les côtés & de toutes les diagonales de cette figure, diviſée par le nombre de ſes côtés ou ſommets. Cette propoſition eſt vraie tant pour les figures régulières planes, que pour les cinq ſolides réguliers; & elle s'applique également à toutes les figures qui, ayant un centre de figure, ſont inſcriptibles, au cercle ſi ce ſont des figures planes, & à la ſphère ſi ce ſont des ſolides.

§. 7. Le centre de gravité d'un nombre quelconque de corps, eſt en même tems le centre d'équilibre d'un pareil nombre de forces, agiſſantes ſelon un même ſens, dans des directions parallèles entr'elles, & qui étant apliquées aux centres de gravité de ces corps, ont des intenſités qui ſont entr'elles comme leurs maſſes.

La propoſition précédente s'applique également au centre d'équilibre d'un nombre quelconque de forces, agiſſantes dans des directions parallèles entr'elles, mais dans deux ſens oppoſés.

Pour cela il ſuffit de changer les ſignes des forces agiſſantes dans la direction oppoſée à celle qu'on regarde comme la principale.

Exemple I.

§. 8. Soient deux forces oppoſées a & b, appliquées aux points A & B & ſoit Q leur centre d'equilibre. L'équa-

quation :

$$Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b = A\,B^2 \times \frac{a\,b}{a+b}$$

ſe change dans la ſuivante, en faiſant b négative :

$$Q\,A^2 \times a - Q\,B^2 \times b = A\,B^2 \times \frac{a\,b}{a-b}, \text{ ou}$$

$$Q\,B^2 \times b - Q\,A^2 \times a = Q\,B^2 \times \frac{a\,b}{a-b}.$$

Cet exemple ſe démontre immédiatement de la même manière que le premier exemple, §. 2.

Puisque Q eſt le centre d'équilibre des forces oppoſées a et b appliquées en A & B; ſi a eſt ſuppoſée plus grande que b, l'ordre des points A, B, Q, eſt B, A, Q; de manière que $A\,Q : B\,Q = b : a$. De là :

$$A\,Q = A\,B \times \frac{b}{a-b}, \quad \text{donc} \quad A\,Q \times a = A\,B \times \frac{a\,b}{a-b};$$

$$B\,Q = A\,B \times \frac{a}{a-b}, \quad \text{donc} \quad B\,Q \times b = A\,B \times \frac{a\,b}{a-b}.$$

Donc

$$B\,Q^2 \times b - A\,Q^2 \times a = A\,B \times \frac{a\,b}{a-b}\,(B\,Q - A\,Q) =$$

$$= A\,B \times \frac{a\,b}{a-b} \times A\,B = A\,B^2 \times \frac{a\,b}{a-b}.$$

Exemple 2.

§. 9. Soient a, b, c, trois forces dont les directions ſont parallèles, mais dont la force c eſt oppoſée aux forces a & b. Soient A, B, C, leurs points d'applications & Q leur centre d'équilibre : l'équation

$$A\,Q^2 \times a + B\,Q^2 \times b + C\,Q^2 \times c =$$

$$A\,B^2 \times \frac{a\,b}{a+b+c} + A\,C^2 \times \frac{a\,c}{a+b+c} + B\,C^2 \times \frac{b\,c}{a+b+c};$$

ſe change dans la ſuivante :

$$A\,Q^2 \times a + B\,Q^2 \times b - C\,Q^2 \times c =$$

$$A\,B^2 \times \frac{a\,b}{a+b-c} - A\,C^2 \times \frac{a\,c}{a+b-c} - B\,C^2 \times \frac{b\,c}{a+b-c}, \text{ ou}$$

$$C\,Q^2 \times c - A\,Q^2 \times a - B\,Q^2 \times b =$$
$$A\,C^2 \times \frac{ac}{a+b-c} + B\,C^2 \times \frac{bc}{a+b-c} - A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b-c}.$$

La démonſtration immédiate de cet exemple eſt ſemblable à celle du ſecond exemple §. 3.

Soit Q' le centre d'équilibre des forces a & b. Partant
$$Q'A^2 \times a + Q'B^2 \times b = A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b}.$$
Mais
$$Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b = Q'A^2 \times a + Q'B^2 \times b + Q'Q^2\,(a+b).\ (\S.\ 1.).$$
Donc
$$Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b = A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b} + Q'Q^2\,(a+b).\ (\S.\ 2.).$$ Et
$$Q\,C^2 \times c - (Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b)$$
$$= Q\,C^2 \times c - Q\,Q'^2\,(a+b) - A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b}$$
$$= Q'C^2 \times \frac{c\,(a+b)}{a+b-c} - A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b}\ (\S.\ 8.).$$
Mais
$$C\,A^2 \times a + C\,B^2 \times b = Q'A^2 \times a + Q'B^2 \times b + Q'C^2\,(a+b)(\S.\ 1.)$$
$$= A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b} + Q'C^2\,(a+b)(\S.\ 2.).$$
Donc
$$Q'C^2\,(a+b) = A\,C^2 \times a + B\,C^2 \times b - A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b}.$$
Donc
$$Q'C^2 \times c - (Q\,A^2 \times a + Q\,B^2 \times b)$$
$$= (A\,C^2 \times a + B\,C^2 \times b - A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b}) \times \frac{c}{a+b-c} - A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b}$$
$$= A\,C^2 \times \frac{ac}{a+b-c} + B\,C^2 \times \frac{bc}{a+b-c} - A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b}\left(1 + \frac{c}{a+b-c}\right)$$
$$= A\,C^2 \times \frac{ac}{a+b-c} + B\,C^2 \times \frac{bc}{a+b-c} - A\,B^2 \times \frac{ab}{a+b-c}.$$

Exemple 3.

§. 10. Soient quatre forces a, b, c, d, dont les directions ſont paralleles, appliquees aux points A, B, C, D, reſpecti-

ſpectivement, & ſoit la force d oppoſée aux trois autres: l'équation

$$Q A^2 \times a + Q B^2 \times b + Q C^2 \times c + Q D^2 \times d$$
$$= AB^2 \times \frac{ab}{a+b+c+d} + A C^2 \times \frac{ac}{a+b+c+d} + A D^2 \times \frac{ad}{a+b+c+d}$$
$$+ B C^2 \times \frac{bc}{a+b+c+d} + B D^2 \times \frac{bd}{a+b+c+d}$$
$$+ C D^2 \times \frac{cd}{a+b+c+d}$$

devient

$$A Q^2 \times a + B Q^2 \times b + C Q^2 \times c - D Q^2 \times d$$
$$= AB^2 \times \frac{ab}{a+b+c-d} + A C^2 \times \frac{ac}{a+b+c-d} - A D^2 \times \frac{ad}{a+b+c-d}$$
$$+ B C^2 \times \frac{bc}{a+b+c-d} - B D^2 \times \frac{bd}{a+b+c-d}$$
$$- C D^2 \times \frac{cd}{a+b+c-d}.$$

La démonſtration immédiate de ce cas étant tout-à-fait ſemblable à celle du dernier, il ſeroit inutile de la développer.

§. 11. En général. Tant qu'il y aura une ſeule force agiſſante dans un ſens oppoſé à celui ſelon lequel agiſſent d'autres forces en nombre quelconque: la démonſtration immédiate ſera déduite d'une ſeule & même manière des §§. 1. & 8. Mais ſi le nombre des forces oppoſées de part & d'autre eſt plus grand que l'unité: au Lemme du §. 1. il faut ſubſtituer le ſuivant, qui lui correſpond, ou plutôt qui n'en eſt qu'un cas particulier, en changeant les ſignes des quantités oppoſées; mais qu'on peut auſſi démontrer immédiatement.

§. 12. Du centre d'équilibre d'un nombre quelconque de forces dont les directions ſont parallèles, mais qui agiſſent dans deux ſens oppoſés, ſoient menées des droites aux points d'application de toutes ces forces. Soient pris les produits des quarrés de chacune de ces droites par les forces aux points d'ap-

d'application deſquelles elles ſont menées; & ſoit pris l'excès de la ſomme de ceux de ces produits qui apartiennent aux forces agiſſantes dans un des ſens, ſur la ſomme de ceux de ces produits qui apartiennent aux forces agiſſantes dans le ſens oppoſé. Soit faite la même opération pour tout autre point dans l'eſpace. Le ſecond excès diffère du premier, du produit fait du quarré de la diſtance de ces deux points, par la différence de ces deux ſommes de forces; ſavoir: le ſecond excès ſurpaſſe le premier, ou en eſt ſurpaſſé de ce produit, ſuivant que la ſomme des premières forces eſt plus grande ou plus petite que la ſomme des ſecondes forces.

Symboliquement.

Soient a, b, c, d . . . . . l, m, n, les intenſités d'un certain nombre de forces parallèles appliquées aux points A, B, C, D . . . . L, M, N. Soient, a', b', c', d' . . . . l', m', n', les intenſités d'autres forces parallèles, mais oppoſées aux premières; ſoient A′, B′, C′, D′ . . . . . . L′, M′, N′, leurs points d'application. Soit Q, le centre d'équilibre de toutes ces forces & P un point quelconque dans l'eſpace: on a

$$PA^2 \times a + PB^2 \times b + PC^2 \times c + \ldots\ldots + PM^2 \times m + PN^2 \times n -$$
$$-(PA'^2 \times a' + PB'^2 \times b' + \ldots\ldots + PM'^2 \times m' + PN'^2 \times n') =$$
$$= QA^2 \times a + QB^2 \times b + \ldots\ldots + QM^2 \times m + QN^2 \times n -$$
$$-(QA'^2 \times a' + QB'^2 \times b' + \ldots\ldots + QM'^2 \times m' + QN'^2 \times n') +$$
$$+ PQ^2 (a + b + c + d + \ldots\ldots + l + m + n) -$$
$$- PQ^2 (a' + b' + c' + d' + \ldots\ldots\ l' + m' + n').$$

Exemple 4.

§. 13. Soient a, b, c, d, quatre forces dont les directions ſont parallèles, appliquées aux points A, B, C, D; de manière que les deux premieres ſont oppoſees aux deux dernieres: l'équation

QA² ×

$$QA^2\times a+QB^2\times b+QC^2\times c+QD^2\times d$$
$$=AB^2\times\frac{ab}{a+b+c+d}+AC^2\times\frac{ac}{a+b+c+d}+AD^2\times\frac{ad}{a+b+c+d}$$
$$+BC^2\times\frac{bc}{a+b+c+d}+BD^2\times\frac{bd}{a+b+c+d}$$
$$+CD^2\times\frac{cd}{a+b+c+d}$$

devient

$$QA^2\times a+QB^2\times b-QC^2\times c-QD^2\times d$$
$$=AB^2\times\frac{ab}{a+b-c-d}-AC^2\times\frac{ac}{a+b-c-d}-AD^2\times\frac{ad}{a+b-c-d}$$
$$-BC^2\times\frac{bc}{a+b-c-d}-BD^2\times\frac{bd}{a+b-c-d}$$
$$+CD^2\times\frac{cd}{a+b-c-d}$$

La démonſtration immédiate ſe déduit comme il ſuit du §. 12. Soit Q′ le centre d'équilibre des forces a, b, c:

$$Q'A^2\times a+Q'B^2\times b-Q'C^2\times c=AB^2\times\frac{ab}{a+b-c}-AC^2\times\frac{ac}{a+b-c}$$
$$-BC^2\times\frac{bc}{a+b-c}\ (\S.\ 9.).$$

Mais

$$QA^2\times a+QB^2\times b-QC^2\times c=Q'A^2\times a+Q'B^2\times b-Q'C^2\times c+Q'Q^2(a+b-c).$$

(§. 12.). Donc

$$QA^2\times a+QB^2\times b-QC^2\times c-QD^2\times d$$
$$=AB^2\times\frac{ab}{a+b-c}-AC^2\times\frac{ac}{a+b-c}$$
$$-BC^2\times\frac{bc}{a+b-c}-QD^2\times d+Q'Q^2(a+b-c)$$
$$=AB^2\times\frac{ab}{a+b-c}-AC^2\times\frac{ac}{a+b-c}$$
$$-BC^2\times\frac{bc}{a+b-c}-DQ'^2\times\frac{d(a+b-c)}{a+b-c-d}$$

(§. 8.). Mais

$$DA^2\times a+DB^2\times b-DC^2\times c=Q'A^2\times a+Q'B^2\times b-Q'C^2\times c+Q'D^2(a+b-c).$$
$$=AB^2\times\frac{ab}{a+b-c}-AC^2\times\frac{ac}{a+b-c}$$
$$-BC^2\times\frac{bc}{a+b-c}+Q'D^2(a+b-c).$$

Donc

$$Q'D^2(a+b-c)=DA^2\times a+DB^2\times b-DC^2\times c-\left\{\begin{matrix}AB^2\times\frac{ab}{a+b-c}-AC^2\times\frac{ac}{a+b-c}\\ -BC^2\times\frac{bc}{a+b-c}\end{matrix}\right\}.$$

Donc

Donc

$$QA^2 \times a + QB^2 \times b - QC^2 \times c - QD^2 \times d = \left\{ AB^2 \times \frac{ab}{a+b-c} - AC^2 \times \frac{ac}{a+b-c} - BC^2 \times \frac{b}{a+b-c} \right\}$$

$$\times \left(1 + \frac{d}{a+b-c-d}\right) - (DA^2 \times a + DB^2 \times b - DC^2 \times c) \times \frac{d}{a+b-c-d}$$

$$= \left\{ AB^2 \times \frac{ab}{a+b-c} - AC^2 \times \frac{ac}{a+b-c} - BC^2 \times \frac{bc}{a+b-c} \right\} \times \frac{a+b-c}{a+b-c-d}$$

$$- (AD^2 \times a + BD^2 \times b - CD^2 \times c) \times \frac{d}{a+b-c-d}$$

$$= AB^2 \times \frac{ab}{a+b-c-d} - AC^2 \times \frac{ac}{a+b-c-d} - AD^2 \times \frac{ad}{a+b-c-d}$$

$$- BC^2 \times \frac{bc}{a+b-c-d} - BD^2 \times \frac{bd}{a+b-c-d}$$

$$+ CD^2 \times \frac{cd}{a+b-c-d}.$$

§. 14. En général. Du centre d'équilibre d'un nombre quelconque de forces agiſſantes dans des directions parallèles, mais dans deux ſens oppoſés, ſoient menées des droites aux points d'application de toutes ces forces. Soient pris les produits des quarrés de ces droites par les forces aux points d'application deſquelles elles ſont menées, & ſoit pris l'excès de la ſomme de ceux de ces produits qui apartiennent aux forces agiſſantes dans un même ſens, ſur la ſomme de ceux de ces produits qui apartiennent aux forces agiſſantes dans l'autre ſens. Soient pris les produits des quarrés des diſtances des points d'application de ces forces priſes deux à deux, par les quatrièmes proportionnelles à l'excès de la ſomme des premières forces ſur les dernières, & aux deux forces dont le quarré de la diſtance eſt pris pour facteur; & ſoit pris l'excès de la ſomme de ceux de ces produits où il entre deux forces agiſſantes dans un ſeul & même ſens, ſur la ſomme des autres produits: ces deux excès ſont égaux.

Symbo-

Symboliquement.

Soient a, b, c, d, ... l, m, n, des forces parallèles entr'elles, agiſſantes dans un même ſens; & ſoient A, B, C, D, ... L, M, N, leurs points d'application.

Soient, a', b', c', d', ... l', m', n'; d'autres forces parallèles entr'elles, mais oppoſées aux premières; & ſoient A', B', C', D', ... L', M', N', leurs points d'application. Soit Q le centre d'équilibre de toutes ces forces. Soit s la ſomme des premières & s' la ſomme des dernières. On a l'équation:

$$QA^2\times a+QB^2\times b+QC^2\times c+\ldots+QL^2\times l+QM^2\times m+QN^2\times n$$
$$-(QA'^2\times a'+QB'^2\times b'+QC'^2\times c'+\ldots+QL'^2\times l'+QM'^2\times m'+QN'^2\times n')$$
$$=AB^2\times\frac{ab}{s-s'}+AC^2\times\frac{ac}{s-s'}+\ldots+AL^2\times\frac{al}{s-s'}+AM^2\times\frac{am}{s-s'}+AN^2\times\frac{an}{s-s'}$$
$$+BC^2\times\frac{bc}{s-s'}+\ldots+BL^2\times\frac{bl}{s-s'}+BM^2\times\frac{bm}{s-s'}+BN^2\times\frac{bn}{s-s'}$$
$$\ldots\ldots\ldots+CL^2\times\frac{cl}{s-s'}+CM^2\times\frac{cm}{s-s'}+CN^2\times\frac{cn}{s-s'}$$
$$\vdots$$
$$\ldots\ldots+LM^2\times\frac{lm}{s-s'}+LN^2\times\frac{ln}{s-s'}$$
$$+MN^2\times\frac{mn}{s-s'}$$
$$+A'B'^2\times\frac{a'b'}{s-s'}+A'C'^2\times\frac{a'c'}{s-s'}+\ldots+A'M'^2\times\frac{a'm'}{s-s'}+A'N'^2\times\frac{a'n'}{s-s'}$$
$$+B'C'^2\times\frac{b'c'}{s-s'}+\ldots+B'M'^2\times\frac{b'm'}{s-s'}+B'N'^2\times\frac{b\,n'}{s-s'}$$
$$\ldots\ldots\ldots+C'M'^2\times\frac{c'm'}{s-s'}+C'N'^2\times\frac{c'n'}{s-s'}$$
$$\vdots$$
$$+L'M'^2\times\frac{l'm'}{s-s'}+L'N'^2\times\frac{l'n'}{s-s'}$$
$$+M'N'^2\times\frac{m\,n'}{s-s'}$$

$$-\left\{\begin{array}{l}
AA'^2\times\frac{aa'}{s-s'}+AB'^2\times\frac{ab'}{s-s'}+AC'^2\times\frac{ac'}{s-s'}+\ldots\ldots+AM'^2\times\frac{am'}{s-s'}+AN'^2\times\frac{an'}{s-s'}\\
BA'^2\times\frac{ba'}{s-s'}+BB'^2\times\frac{bb'}{s-s'}+BC'^2\times\frac{bc'}{s-s'}+\ldots\ldots+BM'^2\times\frac{bm'}{s-s'}+BN'^2\times\frac{bn'}{s-s}\\
CA'^2\times\frac{ca'}{s-s'}+CB'^2\times\frac{cb'}{s-s'}+CC'^2\times\frac{cc'}{s-s'}+\ldots\ldots+CM'^2\times\frac{cm'}{s-s'}+CN'^2\times\frac{cn'}{s-s}\\
DA'^2\times\frac{da'}{s-s'}+DB'^2\times\frac{db'}{s-s'}+DC'^2\times\frac{dc'}{s-s'}+\ldots\ldots+DM'^2\times\frac{dm'}{s-s'}+DN'^2\times\frac{dn'}{s-s}\\
\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\
LA'^2\times\frac{la'}{s-s'}+LB'^2\times\frac{lb'}{s-s'}+LC'^2\times\frac{lc'}{s-s'}+\ldots\ldots+LM'^2\times\frac{lm'}{s-s'}+LN'^2\times\frac{ln'}{s-s}\\
MA'^2\times\frac{ma'}{s-s}+MB'^2\times\frac{mb'}{s-s'}+MC'^2\times\frac{mc'}{s-s'}+\ldots\ldots+MM'^2\times\frac{mm'}{s-s'}+MN'^2\times\frac{mn}{s-s}\\
NA'^2\times\frac{na'}{s-s'}+NB'^2\times\frac{nb'}{s-s'}+NC'^2\times\frac{nc'}{s-s'}+\ldots\ldots+NM'^2\times\frac{nm'}{s-s'}+NN'^2\times\frac{nn}{s-s}
\end{array}\right\}.$$

La démonſtration immédiate eſt déduite des §§. 8. et 12., de la même manière que la propoſition génerale du §. 5. eſt deduite des §§. 1. & 2.; & partant il ſeroit inutile de la développer.

MÉMOIRE

ſur les naiſſances, mariages & morts dans quelques provinces & villes de la Ruſſie.

Par M. *B. F. Hermann*,

Conſeiller de Cour & Aſſocié penſionaire regnicole à Catharinenbourg en Perme.

Préſenté à l'Académie le 22 Juin 1786.

Pierre premier, dont les exploits excitent notre admiration, dont les travaux pour le bonheur des peuples furent innombrables, qui lutta ſans ceſſe contre une hydre de difficultés toujours renaiſſante & la vainquit, lui enfin, que la reconnoiſſance porte d'âge en âge au temple de mémoire, n'oublia point les plus petits détails de l'adminiſtration & ſongea, à ſe faire rendre compte du nombre des naiſſances, mariages & morts dans toute l'étendue de ſes vaſtes états; établiſſement alors très peu connu du reſte de l'Europe, où l'on n'avoit pas encore calculé le nombre des ſujets pour aſſurer leur ſubſiſtance & connoitre enfin ceux qu'on avoit à protéger ou à défendre.

Ce fut dans le ſupplément aux réglemens faits pour le clergé, publié en 1722, que parut la premiere ordonnance; il y eſt dit §. 86. „ le clergé doit tenir des livres . . . . & faire chaque quatre mois le rapport détaillé des morts & des

 nais-

naiſſances de chaque paroiſſe à l'Archevéque qui en doit envoyer des tables générales au Synode".

Par un autre Ukaſe de l'année 1726, il eſt ordonné d'ajouter aux tables mortuaires l'âge des morts mâles & d'en envoyer un exemplaire au College de guerre. Cette ordonnance fut réiterée en 1737 dans des termes rigoureux propres à en aſſurer l'exécution.

En 1764 M. Büſching, Paſteur à St. Pétersbourg, publia les tables des naiſſances, des morts & des mariages, des communautés allemandes de cette Réſidence.

Presque dans le même temps Sa Majeſté l'Impératrice glorieuſement regnante ordonna, que toutes les paroiſſes de St. Pétersbourg fiſſent paſſer annuellement à l'Académie des Sciences des tables pareilles.

En 1767 le Gouvernement de Vibourg donna ordre aux Conſiſtoires, afin que chaque curé de cette province tienne des régiſtres des morts, des naiſſances & des mariages, & qu'il en envoye à la Chancellerie du dit Gouvernement des tables exactes & détaillées.

En 1768 feu M. de Sievers, Gouverneur de Novogorod, fit faire des tables pareilles dans ſon Gouvernement, & les envoya au Senat dirigeant, qui ordonna à chaque Gouverneur de province de ſe conformer à la même regle.

Par cette ésquiſſe de l'hiſtoire des tables mortuaires en Ruſſie, on voit que depuis plus d'un demi-ſiecle on n'y a pas négligé une choſe, qui eſt ſans doute pour la Politique & le

le bien du peuple de la derniere importance; mais pour en tirer toute l'utilité & tous les ſecours poſſibles il eſt neceſſaire de comparer ces tables avec l'état actuel des habitans, avec leur âge, leur aiſance & toutes les circonſtances locales, en y joignant un état de comparaiſon des productions annuelles, de la quantité exiſtante de bled, de bétail &c. & ſes rapports avec les béſoins des peuples. Pour ce but tous les Gouvernemens devroient envoyer au Senat les tables néceſſaires, dont l'état général préſenteroit au Miniſtère un miroir juſte & ſidèle de la ſituation de l'Empire. L'éxécution d'un plan ſi ſage eſt reſervée ſans doute au regne glorieux de CATHERINE la Grande!

Pour prouver en quelque maniere l'importance de ces tables pour l'Empire de Ruſſie, j'en ai recueilli les ſuivantes, qui ſuffiront à démontrer la néceſſité d'un pareil établiſſement, quoiqu'elles ſoient incomplettes, & que l'éloignement où je ſuis ne m'ait pas permis de faire de plus exactes recherches.

Etat des naiſſances, mariages, & morts dans quelques provinces & villes de l'Empire de Ruſſie.

1.) Dans la ville de St. Pétersbourg.

Années.	Mariages.	Batêmes. Garçons.	Filles.	Total.	Enterremens. Hommes.	Femmes.	Total.
1777 - - -	1352	2982	2872	5854	3382	2278	5660
1778 - - -	1347	2876	2605	5481	2472	1375	3847
1779 - - -	1251	2980	2929	5909	2655	1444	4099
1780 - - -	1820	2876	2693	5539	2751	1523	4274
Total -	5770	11684	11099	22783	11260	6620	17880
1783 - - -	1411	3160	2996	6156	3339	1618	4957

Parmi le nombre des enterremens de cette derniere année il y avoient ſix enfans nés-morts, 39 perſonnes trouvées mortes, & 1010 enfans qui n'ont pas atteint l'âge d'un an.

2.) Dans le Gouvernement de Moscou.

Ann.	Mariages.	Batêmes. Garçons.	Filles.	Total.	Enterremens. Hommes.	Femmes.	Total.
1769	30773	48835	33990	82825	23990	20758	44748
1770	32307	48528	33978	82506	22930	19637	42567
1771	24226	47578	32251	79829	46102	46117	92219
1772	30758	49482	33199	82681	23270	19706	42976
1773	28080	47055	32288	79343	26076	21683	47759
1774	30470	54172	38525	92697	25881	21092	46973
1775	31704	51720	37058	88778	25904	20958	46862
Total	208318	347370	241289	588650	194153	169951	364104

3.) Dans

3.) Dans le Diſtrict de Moscou, (excepté la Ville).	Mariages.	Batêmes.			Enterremens.		
		Garçons.	Filles.	Total.	Hommes.	Femmes.	Total.
Année 1780 -	- -	4546	4075	8621	2101	1601	3702
4.) Dans le Gouvernement de Tver.							
Années 1776 -	5145	8418	5965	14383	3554	2942	7887
— 1778 -	5335	9907	7076	16983	3498	2884	6382
— 1780 -	6074	11048	9013	20061	4315	3613	7954
5.) Dans le Gouvernement de Novogorod.							
Annees 1774 -	9829	- - -	- - -	25733	- - -	- - -	13693
— 1775 *)	10622	- - -	- - -	27480	- - -	- - -	12530
— 1777 -	5582	8536	5581	14118	4216	3641	7857
— 1779 -	5287	9337	7129	16466	3965	3289	7254
6. Dans le Gouvernement de Pskovsk							
Année 1779 -	3804	6433	4653	11086	260	2416	5016
7.) Dans l'Archevêche de Reſan.							
Année 1779 **)	6342	1166	8491	20155	4215	[illegible]	9844

*) Parmi le nombre des morts etoient 1201 d'un age de 70 — 80, 518 de 80 — 90, 155 de 90 — 100, & 12 hommes de 100 jusqu'à 114 ans.

**) Parmi le nombre des morts, il y avoient 10 hommes, qui ont vecû plus que 100 ans.

8.)

		Batêmes.			Enterremens.		
8.) Dans l'Archevêché de Voroneſch.	Mariages.	Garçons.	Filles.	Total.	Hommes.	Femmes.	Total.
Année 1779 *)	8391	18170	13358	31528	5994	5064	11058
9.) Dans l'Archevêché de Vologda. Année 1780 **)	3232	6517	5366	11883	2688	2377	5065
10.) Dans l'Archevêché de Koſtroma. Année 1780 - -	4707	7390	5252	12642	3300	2700	6000
11.) Dans l'Archevêché d'Archangel Année 1782 - -	1718	3567	3328	6895	2898	2691	5589
12.) Dans la Ville de Reval. Année 1778 - -	99	- - -	- - -	360	- - -	- - -	342
13.) Dans la Ville de Vologda. Année 1780 - -	93	176	133	309	142	117	259

14.)

*) Il y a parmi le nombre des batêmes 265 naiſſances illégitimes.

**) Parmi le nombre des morts mâles, il y a 460 enfans morts dans la premiere année de leur vie, & 117 dans la ſeconde. Le plus grand nombre des morts tombe entre l'âge de 70 jusqu'à 80 ans, où moururent 295 hommes. De l'âge de 80 jusqu'à 90 il y avoit 127, & de celui de 90 à 100 ans, 24 morts.

14.) Dans le Gouvernement de Tobolsk.

Années.	Mariages.	Batêmes. Garçons.	Batêmes. Filles.	Batêmes. Total.	Enterremens. Hommes.	Enterremens. Femmes.	Enterremens. Total.
1768 -	7360	11313	10553	21866	4979	4650	9629
1769 -	6080	10235	9541	19776	4542	4392	8934
1770 -	5520	11394	10639	22033	4834	4557	9391
1771 -	8966	10478	9785	20263	5814	5621	11435
1772 -	6414	12127	11427	23534	5571	5172	10743
1773 -	5723	12672	11801	24473	6212	5651	11863
1774 -	6159	13193	11954	25147	6285	5370	11655
1775 -	6914	12993	12138	25131	5906	5439	11345
1776 -	7217	13734	12989	26723	6962	6602	13564
1777 -	6879	13985	12998	26983	6322	5901	12223
1778 -	6990	15124	13928	29052	5863	5452	11315
1779 -	6918	15500	14256	29756	6802	6193	12995
Total -	81140	152748	141989	294737	70092	65000	135092

Parmi le nombre des morts il y a 297 hommes aſſaſſinés, 605 noyés dans des riviéres, 17 tués par la foudre, 19 morts de l'eau-de-vie, 8 hommes peris par le froid, 21 qui ſe ſont pendûs, outre 23 autres ſuicides; enſuite 2 hommes dévorés par des bêtes ſauvages, enfin 6 qui ſe ſont perdus ſans ſavoir de quelle maniere: en tout 998 hommes qui ont pris une fin tragique.

15.) Dans la ville de Tobolsk.

Années.	Mariages.	Batemes.			Enterremens.		
		Garçons.	Filles.	Total.	Hommes.	Femmes.	Total.
1768	249	283	252	535	145	123	268
1769	279	227	241	468	144	148	292
1770	310	288	248	536	170	164	334
1771	254	286	250	536	198	204	402
1772	346	292	265	557	271	289	560
1773	308	364	365	729	236	237	473
1774	218	385	358	743	291	268	559
1775	227	390	352	742	315	290	605
1776	258	403	423	826	334	370	704
1777	242	433	359	792	237	203	440
1778	207	424	415	839	248	239	487
1779	181	446	410	856	292	297	589
1780	190	458	417	875	328	337	665
1781	216	453	413	866	415	400	815
1782	175	471	442	913	421	396	817
1783	164	530	466	996	408	399	807
Total	3824	6133	5676	11809	4453	4364	8817

Table

Table mortuaire

de la ville de St. Pétersbourg, pour chaque mois de l'année 1780.

Mois.	Enterremens.		
	Hommes.	Femmes.	Total.
Janvier	233	145	378
Février	243	126	369
Mars	240	122	362
Avril	245	138	383
Mai	284	124	408
Juin	271	106	377
Juillet	228	127	355
Août	204	133	337
Septembre	187	138	325
Octobre	222	97	319
Novembre	191	141	332
Décembre	203	126	329
Total -	2751	1523	4274

Table
des naiſſances, mariages & morts dans la ville de Tobolsk, pour chaque mois de l'année 1783.

Mois.	Mariages.	Batêmes.			Enterremens.								
		Garçons.	Filles.	Total.	de l'âge de 0 à 10 ans. Garçons.	Filles.	Total.	d'un âge plus grand que 10 ans. Hommes.	Femmes.	Total.	Total. Hommes.	Femmes.	Total.
Janv.	30	75	49	124	17	11	28	19	22	41	36	33	69
Févr.	27	49	49	98	16	16	32	12	19	31	28	35	63
Mars	- -	41	39	80	13	17	30	19	12	31	32	29	61
Avril	6	28	16	44	30	21	51	15	23	38	45	44	89
Mai	14	37	40	77	26	23	49	15	14	29	41	37	78
Juin	11	48	45	93	33	37	70	13	5	18	46	42	88
Juillet	26	40	38	78	28	28	56	11	13	24	39	41	80
Août.	9	44	34	78	16	18	34	11	12	23	27	30	57
Sept.	11	46	34	80	12	21	33	6	15	21	18	36	54
Oct.	15	44	33	77	18	- -	18	8	7	15	26	7	33
Nov.	15	41	47	88	11	9	20	17	16	33	28	25	53
Déc.	- -	37	42	79	20	18	38	22	22	44	42	40	82
Total	164	530	466	996	240	219	459	168	180	348	408	399	807

Outre le nombre des naiſſances marqué dans cette table, il y avoient 5 garçons nés morts. Parmi les accouchées il y a 14, qui avoient mis au monde des jumeaux & une en a même enfanté trois. Parmi les nouveau-mariés il y avoient 31 veufs & 32 veuves. Au nombre des morts ſont compris un tué, un noyé, un mort de froid, & une femme tuée par la foudre.

Table

Table

des morts du ſexe mâle dans le Gouvernement de Tobolsk depuis 1768 jusques & compris l'année 1779; dont le nombre total eſt 70092; rangés ſelon l'âge.

Années.	Nombre.	Années.	Nombre.	Années.	Nombre.	Années.	Nombre.	Années.	Nombre.	Années.	Nombre.	Périodes.	
												Années.	nombre des morts.
1	14583	21	354	41	370	61	436	81	265	101	23	0 - 1	14583
2	5574	22	451	42	413	62	557	82	291	102	15	1 - 3	9295
3	3721	23	451	43	354	63	448	83	216	103	14	3 - 5	4021
4	2327	24	358	44	348	64	395	84	117	104	16	5 - 10	3717
5	1694	25	707	45	751	65	697	85	336	105	14	10 - 15	1843
6	1298	26	439	46	393	66	403	86	215	106	10	15 - 20	2416
7	756	27	422	47	359	67	508	87	140	107	1	20 - 30	4900
8	590	28	431	48	413	68	453	88	123	108	2	30 - 40	4926
9	544	29	373	49	348	69	407	89	189	109	1	40 - 50	4926
10	529	30	914	50	1177	70	1526	90	327	110	8	50 - 60	5387
11	357	31	384	51	359	71	411	91	122	112	2	60 - 70	5830
12	419	32	414	52	520	72	512	92	106	114	1	70 - 80	4595
13	320	33	364	53	379	73	408	93	82	115	4	80 - 90	2219
14	324	34	363	54	358	74	356	94	78	116	1	90 - 100	796
15	423	35	714	55	567	75	587	95	110	120	5	100 - 110	104
16	395	36	394	56	535	76	365	96	70	123	1	110 - 120	13
17	460	37	364	57	345	77	275	97	39	127	1	120 - 130	2
18	452	38	454	58	433	78	275	98	68	(*)	642		
19	350	39	330	59	371	79	313	99	47				
20	759	40	1145	60	1516	80	1093	100	74				

(*) dont l'âge n'eſt pas connù.

Table

des morts de l'un & de l'autre ſexe, ſelon leur âge, dans la ville de Tobolsk compoſant 807 têtes: en l'année 1783.

Années.	Hommes.	Femmes.	Total.	Années.	Hommes.	Femmes.	Total.	Années.	Hommes.	Femmes.	Total.	Années.	Hommes.	Femmes.	Total.	Années.	Hommes.	Femmes.	Total.
1	213	206	419	24	1	2	3	45	7	3	10	67	2	1	3	88	--	1	1
2	4	10	14	25	1	1	2	46	2	1	3	68	--	3	3	89	--	2	2
3	6	2	8	26	2	1	3	47	1	--	1	69	1	--	1	90	2	3	5
4	5	4	9	27	3	5	8	48	3	--	3	70	5	14	19	92	1	3	4
5	5	2	7	28	1	2	3	49	1	2	3	71	--	3	3	93	--	1	1
6	2	1	3	29	3	1	4	50	7	7	14	72	2	6	8	95	--	1	1
7	2	--	2	30	3	2	5	52	--	1	1	73	1	1	2	100	--	1	1
8	--	1	1	31	--	1	1	54	1	--	1	74	--	2	2	120	--	1	1
9	--	3	3	32	--	1	1	55	5	6	11	75	2	4	6				
10	--	1	1	33	3	1	4	56	2	4	6	76	1	2	3				
12	1	2	3	34	--	2	2	57	1	--	1	77	--	3	3				
13	1	1	2	35	8	3	11	58	4	5	9	78	1	1	2				
14	1	--	1	36	3	--	3	59	2	--	2	79	--	1	1				
15	4	--	4	37	3	--	3	60	11	3	14	80	15	15	30				
17	--	3	3	38	1	--	1	61	4	--	4	81	2	1	3				
19	1	2	3	39	1	--	1	62	1	3	4	82	2	3	5				
20	2	--	2	40	8	9	17	63	2	2	4	83	--	2	2				
21	1	1	2	42	4	--	4	64	3	2	5	85	5	3	8				
22	3	2	5	43	3	1	4	65	2	3	5	86	1	1	2				
23	1	4	5	44	1	1	2	66	2	1	3	87	1	1	2				

Table

des morts de l'un & de l'autre ſexe dans la ville de Tobolsk, en l'année 1783 compoſant 807 têtes, où l'âge eſt expoſé périodiquement.

Années.	Mâles.	Femelles.	Total.	Années.	Hommes.	Femmes.	Total.	Années.	Hommes.	Femmes.	Total.
0—1	213	206	419	30—35	11	8	19	70—75	5	16	21
1—3	10	12	22	35—40	16	9	25	75—80	17	22	39
3—5	10	6	16	40—45	15	5	20	80—85	9	9	18
5—10	4	6	10	45—50	14	10	24	85—90	4	8	12
10—15	7	3	10	50—55	6	7	13	90—95	1	5	6
15—20	3	5	8	55—60	20	12	32	95—100	--	1	1
20—25	7	10	17	60—65	12	10	22	100—120	--	1	1
25—30	12	11	23	65—70	10	19	29				

Table

des morts de l'un & de l'autre ſexe dans la ville de St. Pétersbourg pour l'année 1780: compoſant 4274 têtes, où l'âge eſt expoſé périodiquement.

Années.	Mâles.	Femelles.	Total.	Années.	Hommes.	Femmes.	Total.	Années.	Hommes.	Femmes.	Total.
couches précoces	11	2	13	20—25	188	42	230	65—70	62	40	102
0—1	511	504	1015	25—30	267	88	355	70—75	61	66	127
1—2	170	96	266	30—35	234	44	278	75—80	31	23	54
2—3	53	46	99	35—40	229	69	298	80—85	28	31	59
3—5	51	71	122	40—45	132	56	188	85—90	11	7	18
5—10	48	36	84	45—50	151	62	213	90—95	4	3	7
10—15	36	15	51	55—60	81	45	126	95—100	2	2	4
15—20	78	43	121	60—65	93	62	155				

Table

Table

des morts du ſexe mâle dans le Gouvernement de Novogorod, compoſant 3965 têtes en l'année 1779, où leur âge eſt expoſé périodiquement.

Années.	Enfans.	Années.	Garçons.	Années.	Hommes.	Années.	Vieillards	Années.	Vieillards
1	282	7	33	31—40	398	86— 90	117	115	1
2	93	8	40	41—50	461	91— 95	30	120	1
3	83	9	15	51—60	506	96— 99	24		
4	69	10	28	61—70	539	100—105	9		
5	46	11—20	248	71—80	438	108	1		
6	36	21—30	357	81—85	109	109	1		

Table

des morts du ſexe mâle dans l'Archevêché de Voroneſch, compoſant 5994 têtes en l'année 1779, où l'âge eſt expoſé périodiquement.

Années.	Enfans.	Années.	Garçons.	Années.	Hommes.	Années.	Vieillards
1	748	5	112	31—40	467	71— 80	420
2	409	6—10	237	41—50	605	81— 90	227
3	294	11—20	448	51—60	649	91—100	51
4	176	21—30	419	61—70	575	100—120	7

Table

des morts du ſexe mâle dans l'Archevêché d'Archangel, compoſant 2898 têtes en 1782, & rangé ſelon l'âge.

Années.	Morts.	Années.	Morts.	Années.	Morts.	Années.	Morts.	Années.	Morts.	Années.	Morts.
1	704	18	16	35	26	52	27	69	35	86	14
2	164	19	15	36	12	53	30	70	61	87	2
3	78	20	27	37	12	54	13	71	29	88	1
4	78	21	11	38	11	55	25	72	34	89	5
5	73	22	21	39	23	56	23	73	35	90	7
6	28	23	18	40	35	57	23	74	20	91	5
7	26	24	19	41	16	58	16	75	28	92	1
8	13	25	27	42	23	59	18	76	26	93	2
9	17	26	21	43	17	60	49	77	17	96	1
10	20	27	17	44	12	61	21	78	19	97	1
11	8	28	23	45	29	62	25	79	22	99	1
12	11	29	35	46	16	63	27	80	41		
13	14	30	27	47	21	64	19	81	17		
14	11	31	14	48	19	65	35	82	21		
15	16	32	23	49	30	66	21	83	15		
10	12	33	13	50	32	67	24	84	12		
17	11	34	15	51	15	68	29	85	[illegible]		

Table

des morts du ſexe mâle dans l'Archevêché d'Archangel, compoſant 2898 têtes en 1782: où l'âge eſt expoſé périodiquement.

Années.	Morts.	Années.	Morts.	Années.	Morts.	Années.	Morts.
0— 1	704	11—15	60	41—50	215	81—90	101
2— 3	242	16—20	81	51—60	239	91—99	12
4— 5	151	21—30	219	61—70	297		
6—10	104	31—40	184	71—80	271		

I. Par ces tables il paroît, que dans tout l'Empire de Ruſſie (s'il eſt permis de généraliſer les concluſions qu'on en peut tirer,) il nait plus de perſonnes qu'il n'en meurt. Dans la pluspart des provinces ce ſurplus eſt même fort conſidérable.

Dans la ville de St. Pétersbourg il y avoit en 4 années, ſavoir depuis 1777 jusques & compris l'année 1780 4903 naiſſances de plus que de morts; dans chaque année donc la population de cette ville a été augmentée de 1225 têtes. En 1783 il y avoit 1199 naiſſances de plus que de morts; par conſéquent la proportion s'eſt conſervée preſque la même pendant ſept ans: d'où il ſuit, que la population de cette réſidence doit dans les dernieres 10 années, avoir gagné plus de 12000 perſonnes, ſeulement par le ſurplus de naiſſances ſur les morts.

Dans le Gouvernement de Moscou, il y avoit en ſept ans, ſavoir depuis 1769 jusques & compris l'année 1775,

224555 naiſſances de plus que de morts, quoique la peſte en 1771 aie couté à la population de ce Gouvernement plus de 50000 perſonnes, ſans compter les morts ordinaires de cette année; par conſéquent il y nait chaque année 32080 enfans de plus qu'il n'y meurent de perſonnes: en général la mortalité paroît s'y diminuer chaque année, car en 1769 il n'y avoit que 38077 naiſſances de plus que de morts, & en 1775 ce ſurcroit étoit déja de 41916.

Dans le diſtrict de Moscou, excepté la ville, il naquit en 1780, 4919 enfans de plus, que ne moururent de perſonnes.

Dans le Stathouderat de Tver, (il eſt à ſavoir qu'aujourdhui l'Empire de Ruſſie eſt diviſé en Stathouderats, Lieutenances, ou Gouvernemens, Намѣстничества,) le nombre des naiſſances ſurpaſſe chaque année celui des morts presque de 10000 têtes.

De même le Stathouderat de Novogorod acquiert chaque année une augmentation de plus de 9000 habitans, ſeulement par le ſurplus des naiſſances ſur les morts. Mais dans le Stathouderat de Pskovsk les naiſſances en 1779 n'ont ſurpaſſé le nombre des morts que de 6070, la population y étant beaucoup moindre.

L'Archevêché de Réſan avoit en 1779, 10311 naiſſances de plus que de morts.

Dans l'Archevêché de Voroneſch le nombre des naisſances ſurpaſſoit en 1779, celui des morts de 20470.

Dans l'Archevêché de Koſtroma ils nacquirent en 1780, 6642 enfans de plus que ne moururent de perſonnes.

Dans

Dans le Gouvernement de Tobolsk le nombre des naiſſances en 12 années, c'eſt à dire depuis 1768 jusques & compris 1779, ſurpaſſoit celui des morts de 159645, & dans la ſeule année de 1779 de 16761 perſonnes.

Le nombre des habitans de la ville de Tobolsk, depuis 1768 jusques 1783, s'eſt augmenté, par le ſurplus des naiſſances ſur les morts, de 2992 perſonnes; mais en 1783 cette augmentation n'étoit que de 189.

Dans l'Archevêché d'Archangel le nombre des naiſſances ſurpaſſoit en 1780, celui des morts de 1306.

Dans l'Archevêché de Vologda le nombre des batêmes excedoit en 1780 celui des enterremens de 6818.

II. Par la comparaiſon des naiſſances & des morts dans les provinces & villes ſusdites, il en réſulte les proportions ſuivantes:

	Batêmes.	Enterremens.
Dans la ville de St. Pétersbourg.	13	10
le Gouv. de Moscou. - - -	21	10
le diſtrict de Moscou. excepté la ville.	21	10
le Stathouderat de Tver. - -	26	10
le Stathouderat de Novogorod. -	20	10
le Stathouderat de Pskovsk. - -	22	10
l'Archevêché de Réſan. - - -	20	10
l'Archevêché de Voroneſch. - -	29	10
l'Archevêché de Vologda. - -	23	10
l'Archevêché de Koſtroma. - -	20	10
l'Archevêché d'Archangel. - -	13	10
le Gouvernement de Tobolsk. -	21	10
la ville de Tobolsk. - - -	13	10
la ville de Reval. - - - -	11	10
la ville de Vologda. - - -	12	10

III. On voit par cette comparaiſon, que dans les Stathouderats de Moscou, de Novogorod, de Tobolsk & d'autres, l'augmentation de la population eſt presque la même, quoique le climat y ſoit très différent; que dans les Stathouderats de Voroneſch & de Tver, la population s'accroit encore presque d'un tiers de plus, que dans les Gouvernemens ſusdits; qu'à cet égard l'Archevêché d'Archangel & la ville de Tobolsk ſe trouvent avoir le même ſort que la ville de St. Pétersbourg: & que dans les petites villes de Reval & de Vologda la mortalité excede encore celle de la réſidence.

Il eſt bien ſurprennant, que dans la province de Voroneſch le nombre des naiſſances excede ſi prodigieuſement celui des morts, & qu'au contraire dans l'Archevêché d'Archangel, comparé aux autres provinces, la population fait de ſi foibles progrès.

En général dans la pluspart des provinces indiquées, la population double en 45, 50, 55 jusqu'à 60 années; au lieu que dans la plus grande partie des autres pays de l'Europe cela n'arrive que dans un eſpace de 95 à 100 années.

Dans le Gouvernement de Tobolsk le nombre des mariages ne s'eſt pas augmenté conſidérablement en 12 années: cependant dans les dernieres années le nombre des batêmes étoit bien plus grand; en ſorte que les naiſſances de l'année 1779 excédoit celles des premieres années de cette période presque d'un tiers. Eſt-ce que les mariages ſont devenus plus proliſériques? c'eſt une queſtion, que je ne ſaurois réſoudre: auſſi la population de ce Gouvernement s'augmente & la mortalité diminue chaque année. Dans la ville de Tobolsk au contraire les naiſſances s'augmentent auſſi; mais la mort fait plus de ravages dans ces dernieres années qu'-

autre-

autrefois, & le nombre des mariages diminue chaque année tellement, qu'en 1783 il y en eurent presque la moitié moins que dans l'année 1768.

IV. Dans presque toutes les provinces ſusmentionnées, il nait beaucoup plus de garçons que de filles. En voi-ci les proportions.

	Garçons.	Filles.
Dans la ville de Pétersbourg. - - - - -	21	20
le Gouvernement de Moscou. - -	28	20
le diſtrict de Moscou. - - - - -	22	20
le Stathouderat de Tver. - - -	26	20
le Stathouderat de Novogorod. - -	28	20
le Stathouderat de Pskovsk. - - -	27	20
l'Archevèché de Réſan. - - - -	27	20
l'Archevéché de Voroneſch. - -	27	20
l'Archevêché de Vologda. - - -	24	20
l'Archevêché de Koſtroma. - - -	28	20
l'Archevêché d'Archangel. - - -	21	20
la ville de Vologda. - - - - - -	29	20
le Gouvernement de Tobolsk. - -	22	20
la ville de Tobolsk. - - - - - -	21	20

On voit par cette comparaiſon qu'ils naiſſent en Ruſſie beaucoup plus de garçons que dans la plupart des autres pays européens; que parmi les provinces ſusdites, dans celles où l'augmentation de la population eſt proportionellement plus grande & la mortalité plus petite que dans d'autres, il nait auſſi plus de garçons, & que dans la ville de St. Pétersbourg, dans celle de Tobolsk, & dans l'Archevêché d'Archangel, où le nombre des naiſſances eſt presque égal à celui des morts la proportion entre les naiſſances des garçons & des filles s'égaliſe, d'où il paroitroit que le climat, le luxe, l'aiſance ont une

une grande influence ſur la production des garçons. Les provinces de Ruſſie, où il nait à proportion beaucoup plus de garçons que de filles, ſe trouvent être les plus belles de cet Empire. Dans celles, dont le climat eſt plus froid, p. e. l'Archevêché d'Archangel, les Gouvernemens de Tobolsk & de Vologda, le nombre des garçons diminue conſidérablement; il en arrive la même choſe dans les villes de St. Pétersbourg, de Moscou & de Tobolsk, où il y a plus de luxe & par conſéquent moins de ſanté. Cependant on voit par la table ſusdite, qu'en général dans le Gouvernement de Moscou le ſurplus des garçons ſur les filles eſt auſſi conſidérable que dans les Stathouderats de Tver, de Voroneſch, &c. d'où il faut conclure, qu'à cet égard le pays de ce Gouvernement, qui eſt un des plus beaux & des plus ſains, repare la perte que cauſe la capitale.

En général il me ſemble qu'on peut tirer la regle ſuivante: que moins il y a de mortalité dans un pays plus il y nait de garçons en proportion de filles: ce qui doit exiger encore beaucoup d'obſervations.

V. Dans toutes les provinces & villes ſusdites, il meurt plus d'hommes que de femmes, dans les proportions ſuivantes:

	Hommes	Femmes.
Dans la ville de St. Pétersb. année commune.	34	20
En 1783. - - - - - - -	41	20
le Gouvernement de Moscou. - -	23	20
le diſtrict de Moscou, excepté la ville.	26	20
le Stathouderat de Tver. - - -	24	20
le Stathouderat de Novogorod. - -	23	20
le Stathouderat de Pskovsk. - - -	21	20

l'Arche-

	Hommes	Femmes.
l'Archevêché de Réſan - - - -	23	20
l'Archevêché de Voroneſch - - -	23	20
l'Archevêché de Vologda - - -	22	20
l'Archevêché de Koſtroma - - -	24	20
l'Archevéché d'Archangel - - -	22	20
la ville de Vologda - - - - - -	23	20
le Gouvernement de Tobolsk - -	21	20
la ville de Tobolsk - - - - - -	21	20

d'où il paroit, qu'il meurt dans les provinces ruſſes plus d'hommes que de femmes, mais que dans la plupart (exceptées les grandes villes) il nait plus de garçons qu'il ne meurt d'hommes; que par conſéquent le nombre des hommes doit exceder conſiderablement celui des femmes. En effet dans le Gouvernement de Tobolsk il s'eſt trouvé par la derniere reviſion 9221 hommes de plus que des femmes. S'il eſt de même dans les autres Gouvernemens, cela ne donneroit pas la meilleure idee des moeurs, & prouveroit que la Ruſſie ne doit gueres favoriſer la Polygamie.

VI. Un mariage donne:

		Enfans
Dans	la ville de St. Pétersbourg environ - - -	4,
	le Gouvernement de Moscou environ - -	3,
	le Stathouderat de Tver plus de - - -	3,
	le Stathouderat de Novogorod environ - -	3,
	le Stathouderat de Pskovsk environ - - -	3,
	l'Archevéché de Reſan - - - - - - - -	3,
	l'Archevêche de Voroneſch environ - - -	4,
	l'Archevêché de Vologda environ - - -	4,
	l'Archevêché de Koſtroma environ - - -	3,
	l'Archevêché d'Archangel - - - - - - -	4,

		Enfans
Dans	la ville de Vologda plus de - - - - - -	3,
	la ville de Reval environ - - - - - - -	4,
	le Gouvernement de Tobolsk - - - - - -	4,
	la ville de Tobolsk depuis 1768 jusqu'à 1778 -	3,
	—— depuis 1779 jusqu'à 1783, année commune - - - - -	5,
	—— en 1783 - - - - - -	6,

Ainſi les provinces, où à proportion la mortalité eſt plus grande, où il nait beaucoup plus de garçons que de filles, où il meurt beaucoup plus d'hommes que de femmes, ſont juſtement celles où les mariages ſont les plus proliferiques; c'eſt à dire la ville de St. Pétersbourg, celle de Tobolsk, l'Archevêché d'Archangel: donc la mortalité en général, celle des hommes en particulier, le nombre des naisſances, la production des garçons, paroiſſent avoir entre eux ainſi qu'avec le climat & le luxe des rapports frappans. On peut bien conclure, que l'augmentation des naiſſances dans la ville de St. Pétersbourg & ſurtout dans celle de Tobolsk ne provient pas d'une plus grande fécondité des mariages, mais qu'elle eſt plustôt une ſuite des liaiſons illégitimes, qui croiſſent à méſure que les mariages diminuent; mais dans les Gouvernemens de Tver, de Voroneſch, de Vologda &c. où les mariages donnent plus d'enfans que dans les autres provinces ſusdites, la cauſe principale en eſt ſans doute le beau ciel & l'aiſance, dont les habitans jouiſſent: car dans l'Archevêché de Voroneſch il n'y avoient en 1779 parmi 31528 enfans que 265 illégitimes, par conſéquent un ſeul contre 119 légitimes.

Au reſte la fécondité des mariages en Ruſſie n'excede pas celle des autres pays en Europe, ou à l'ordinaire un mariage donne 4 enfans; ainſi l'augmentation conſidérable de la population

pulation de cet Empire ne provient pas d'une plus grande fécondité des mariages, mais ſeulement de la mortalité, qui y eſt beaucoup moindre que dans la plupart des provinces Européennes: ce que nous prouverons dans la ſuite.

VII. Si le nombre des habitans des provinces & des villes, que nous citons, étoit exactement connû, l'aſſertion ſeroit bientôt décidée; mais nos tables à cet égard ſont encore très imparfaites, & nous devons contenter nôtre curioſité avec des vraiſemblances.

Le nombre des habitans de St. Pétersbourg ne va ſûrement pas au delà de 140, 000.

En 1780 le diſtrict de Moscou, excepté la ville, avoit 277535 habitans.

Le Gouvernement de Tobolsk contient environ 50000, & la ville de Tobolsk 18000 habitans.

Selon les reglemens nouveaux un cercle dans un Gouvernement doit contenir 20 à 30000 habitans mâles; par conſéquent le Stathouderat de Tver, conſiſtant en 12 cercles, contiendroit environ 600000, le Stathouderat de Novogorod, étant de 10 cercles, auroit environ 500000, & le Stathouderat de Pskovsk, ayant 9 petits cercles, conteroit environ 400000 habitans des deux ſexes.

Si l'on compare ces nombres d'habitans avec les naiſſances, il paroit, qu'il nait un enfant contre un certain nombre d'habitans dans la proportion ſuivante: ou bien que le nombre des naiſſances eſt au nombre total des habitans.

 Dans

Dans la ville de St. Pétersbourg en 1780 comme 1 à 27.
1783 — 1 : $22\frac{3}{4}$.
le diſtrict de Moscou - - - - - — 1 : $31\frac{5}{1}$.
le Stathouderat de Tver - - - — 1 : $28\frac{8}{11}$.
le Stathouderat de Novogorod - - — 1 : $30\frac{3}{8}$.
le Stathouderat de Pskovsk - - - — 1 : 36.
le Gouvernement de Tobolsk - - — 1 : 20.
la ville de Tobolsk en 1783 - - — 1 : 18.

VIII. Suppoſant maintenant, que la fécondité des mariages dans les Archevêchés ſusdits & dans le Gouvernement de Moscou égale p. e. celle du Gouvernement de Tver, & l'Archevèché de Réſan devroit contenir environ 570000, l'Archevêché de Voroneſch 880000, l'Archevêché de Vologda 332000, l'Archevêché de Koſtroma 354000, celui d'Archangel 155000, la ville de Vologda 9000, la ville de Réval 10000, & le Gouvernement de Moscou 1, 500, 000 habitans des deux ſexes; d'où il ſuivroit que la mortalité dans toutes ces différentes provinces ſeroit la ſuivante: ſavoir, que le nombre des morts ſeroit au nombre total des habitans:

Dans la ville de St. Pétersbourg en 1783 comme 1 à $28\frac{1}{7}$.
le Gouvernement de Moscou - - - — 1 : 32.
le diſtrict de Moscou, excepté la ville,
en 1780 - - - - — 1 : $74\frac{2}{3}$.
le Stathouderat de Tver - - - - — 1 : $75\frac{3}{4}$.
le Stathouderat de Novogorod - - — 1 : $68\frac{6}{7}$.
le Stathouderat de Pskovsk - - - — 1 : $70\frac{4}{5}$.
l'Archevêche de Réſan - - - - — 1 : $50\frac{7}{9}$.
l'Archevêché de Voroneſch - - - — 1 : $79\frac{6}{11}$.
l'Archevêché de Vologda - - - — 1 : $65\frac{2}{5}$.
l'Archevêché de Koſtroma - - - — 1 : 59.
l'Archevêché d'Archangel - - - — 1 : $28\frac{3}{5}$.

Dans

Dans la ville de Réval - - - -	comme	1	à 29.
de Vologda - - - - -	—	1	: 35.
le Gouvernement de Tobolsk -	—	1	: 44.
la ville de Tobolsk, année commune	—	1	: $32\frac{3}{5}$.
- - - - en 1783 - -	—	1	: $22\frac{1}{4}$.

De ce calcul, que je ſuppoſe être aſſés exact, on voit que la mortalité dans la ville de St. Pétersbourg & dans l'Archevèché d'Archangel eſt à peu-près comme à Berlin; mais que dans la ville de Tobolsk elle eſt comme à Vienne, à Paris ou à Londres. Il ſe peut bien, que le nombre ſuppoſé des habitans n'eſt pas fort juſte: cependant pour le diſtrict de Moscou il eſt ſur, & pour les Gouvernemens de Tobolsk & de Tver il doit même être exact, jusqu'à un ou deux mille de plus ou de moins; on peut donc conclure avec toute la vraiſemblance poſſible, que dans la plûpart des provinces de Ruſſie de 50 jusques à 75, ou ſelon une proportion moyenne, de 60 vivans il ne meurt qu'un, ce qui pour la population de cet Empire ouvre la perſpective la plus conſolante. En même tems il mérite d'etre recherché par les Phyſiciens & les Médécins, d'où vient qu'à l'égard des autres païs Européens la mortalité en Ruſſie ſoit en général ſi petite, & qu'à proportion de cette moindre mortalité il y nait beaucoup plus de garçons que de filles?

IX. Comparant les mariages avec le nombre des habitans, on trouve que le nombre des mariages eſt à celui de tous les habitans:

Dans la ville de St. Petersbourg en 1783 -	comme	1	à $49\frac{1}{2}$.
le Gouvernement de Moscou, année commune	—	1	: $25\frac{2}{5}$.
le Stathouderat de Tver - - - - - - -	—	1	: $49\frac{1}{3}$.
le Stathouderat de Novogorod - - - -	—	1	: $45\frac{1}{2}$.
le Stathouderat de Pskovsk - - - - - -	—	1	: $52\frac{4}{7}$.

I 3 Dans

Dans l'Archevêché de Réſan - - - - comme 1 à $44\frac{5}{6}$.
l'Archevêché de Voroneſch - - - — 1 : $52\frac{1}{2}$.
l'Archevêché de Vologda - - - - — 1 : $51\frac{1}{3}$.
l'Archevêché de Koſtroma - - - - — 1 : $37\frac{5}{9}$.
l'Archevêché d'Archangel - - - - — 1 : 45.
la ville de Réval - - - - — 1 : 50.
la ville de Vologda - - - - — 1 : 48.
le Gouvernement de Tobolsk, année commune, — 1 : 37.
la ville de Tobolsk année commune - — 1 : $37\frac{3}{4}$.
en 1783 - - — 1 : $54\frac{2}{3}$.

d'où l'on peut conclure, que dans les grandes villes comme à St. Pétersbourg, Moscou, Tobolsk, &c. il ſe marie un de 50 habitans, mais que dans la plûpart des provinces de 35 à 40 habitans il ſe marie un: ou, ce qui revient au même, dans les villes il ſe fait annuellement de 100, & dans le provinces de 70 — 80 habitans un mariage.

X. Des garçons nouveaux-nés il meurt ſans avoir atteint l'âge d'une année:

Dans la ville de St. Pétersbourg presque le 5e; dans le Gouvernement de Tobolsk presque le 10e; dans la ville de Tobolsk le 3e; mais dans l'Archevêché de Vologda à peine le 14e; dans le Gouvernement de Novogorod le 31e; dans l'Archevêché de Voroneſch le 24e; & dans l'Archevêché d'Archangel encore le 5e.

Il eſt fort ſurprennant, que dans les provinces, où il nait beaucoup plus de garçons qu'ailleurs, ils ſe portent auſſi mieux dans leur premier âge.

XI. De 4274 perſonnes des deux ſexes, qui en 1780 moururent à St. Pétersbourg, & de 807 qui en 1783 moururent dans la ville de Tobolsk, il y avoit:

d'un

	à St. Pétersbourg.	à Tobolsk.
d'un âge de 0 à 15 ans	la $2\frac{3}{8}$. partie	la $1\frac{3}{4}$. partie
15 – 30	6.	$16\frac{3}{4}$.
30 – 45	$5\frac{4}{7}$.	$12\frac{1}{2}$.
45 – 75	$12\frac{1}{3}$.	$11\frac{2}{3}$.
75 – 100	30.	$10\frac{4}{7}$.
100 & plus	- - -	807.

on voit qu'il y a dans la ville de Tobolsk parmi les morts beaucoup plus d'enfans d'un à 15 ans, qu'à St. Pétersbourg; mais qu'ici la mortalité entre 15 à 45 eſt de la moitié plus grande qu'à Tobolsk, que de 45 à 75 elle eſt presque égale dans les deux villes, & que de 75 à 100 elle eſt moindre à St. Pétersbourg: d'où il ſuit, que dans cette réſidence il y a plus de perſonnes qui acquierent un âge fort conſidérable, qu'à Tobolsk.

XII. Comme les tables mortuaires des autres provinces ne regardent que le ſexe mâle, en excluant l'autre ſexe, & en comparant le nombre des morts avec celui des vivans, nous trouvons, qu'il meurt annuellement du nombre total des hommes:

	Dans la ville		Dans le Gouvernement		Dans l'Archevêche.		
d'un âge de	de St. Pétersboug.	de Tobolsk.	de Tobolsk.	de Novogorod.	de Vologda.	de Voroneſch.	d'Archangel.
0 à 20	le $4\frac{4}{9}$e	$3\frac{1}{4}$e	$1\frac{21}{173}$e	$4\frac{1}{13}$e	- - -	$2\frac{1}{158}$e	$2\frac{2}{13}$e
20 – 40	le $4\frac{2}{3}$.	$16\frac{43}{49}$.	$7\frac{1}{9}$.	$5\frac{1}{7}$.	- - -	$6\frac{3}{4}$.	$7\frac{1}{6}$.
40 – 60	le $11\frac{2}{3}$.	$11\frac{1}{4}$.	$6\frac{4}{5}$.	$4\frac{1}{10}$.	- - -	$4\frac{3}{4}$.	$6\frac{1}{4}$.
60 – 70	le $27\frac{8}{15}$.	$36\frac{15}{22}$.	12.	$7\frac{1}{5}$.	- - -	$10\frac{2}{5}$.	$9\frac{22}{27}$.
70 – 80	le $46\frac{4}{9}$.	$36\frac{15}{22}$.	$15\frac{1}{4}$.	9.	9e	$14\frac{1}{4}$.	$10\frac{18}{27}$.
80 – 90	le $109\frac{2}{3}$.	62.	$33\frac{1}{2}$.	$17\frac{1}{2}$.	$21\frac{1}{3}$.	$26\frac{9}{22}$.	$28\frac{1}{10}$.
90 – 100	le 712.	807.	$90\frac{4}{7}$.	$73\frac{2}{5}$.	$207\frac{5}{6}$.	$117\frac{2}{5}$.	$241\frac{1}{2}$.
100 & plus	- - -	- - -	589.	305.	- - -	856.	- - -

on

on voit donc par ce calcul, que parmi le nombre des morts mâles, il ſe trouve à St. Pétersbourg presque la 4e partie, dans la ville de Tobolsk presque le tiers, dans le Gouvernement de Tobolsk plus que la moitié, dans le Gouvernement de Novogorod presque le quart, & dans les Archevêchés de Voroneſch & d'Archangel presque la moitié, qui meurent dans la plus belle période de leur vie!

Dans le Gouvernement de Tobolsk, où dans un eſpace de 12 années les naiſſances excédoient les morts de 159645 perſonnes, où pluſieurs habitans atteignirent un âge fort conſidérable, il ſe trouve cependant que plus de la moitié des hommes morts n'ont pas atteints l'âge de 20 ans, & que la cinquieme partie des morts des deux ſexes ſont des enfans qui moururent dans la premiere année de leur vie; il arrive presque la même choſe dans l'Archevêché de Voroneſch, où il nait tant de garçons, & où la mortalité eſt moindre: la moitié des morts mâles y ſont cependant des hommes, qui meurent avant la 20 année.

PRO-

PROBLEMATIS CVIVSDAM SPHAERICI SOLVTIO.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. die 22 Iunii 1786.

Sit E B Q F E circulus Sphaerae maximus, cuius polus P, eique parallelus circulus minor L R. Aſſumatur circuli E Q quicunque arcus A B pro baſe trianguli ſphaerici A C B; atque ducti per C circuli P C D ad baſin normalis pars C D analogice vocari poteſt trianguli A C B *altitudo*. Quodſi iam ad quodvis punctum C in circulo L R pro lubitu aſſumtum ducantur arcus maximi A C, B C, innumera orientur triangula ſphaerica eiusdem baſeos A B altitudinisque C D; quae quidem, ſi eſſent plana, aequalem quoque haberent aream. Quod vero in triangulis ſphaericis longe aliter ſeſe habere, facile patet. Quaeritur itaque, ubinam area trianguli A C B valorem ſuſceptura ſit maximum vel minimum? Vnde ſequens oritur Planche * Fig. 1.

Problema.

Datur trianguli ſphaerici A C B *baſis* A B = c, *ac altitudo* C D = a. *Quaeruntur areae Maxima et Minima.*

 Solutio.

Solutio.

Appellemus angulos $CAB = A$, $CBA = B$, $ACD = \gamma$, $BCD = \delta$. Cum itaque area trianguli ACB ſit $= A + B + \gamma + \delta - \pi$, ea valorem induet maximum vel minimum, ubi $\partial S = 0$, poſito nempe $A + B + C = S$, vel vbi

$$\partial A + \partial B + \partial\gamma + \partial\delta = 0.$$

Poſito igitur $AD = \alpha$, $BD = \beta$, erit $\alpha + \beta = c$, ideoque $\partial\beta = -\partial\alpha$. Habemus autem in triangulo ACD, tang. $A = \frac{tang.\, a}{ſin.\, \alpha}$, tang. $\gamma = \frac{tang.\, a}{ſin.\, a}$; ac in $\Delta\, BCD$, tang. $B = \frac{tang.\, a}{ſin.\, \beta}$, tang. $\delta = \frac{tang.\, \beta}{ſin.\, a}$. Brevitatis gratia pono ſin. $a = m$, coſ. $a = n$, tang. $a = p$, ſec. $a = q$. Erit itaque

$$\partial.\, tang.\, A = \frac{\partial A}{coſ.^2 A} = -\frac{p\, coſ.\, \alpha\, \partial\alpha}{ſin.^2\, \alpha},$$

$$\partial.\, tang.\, B = \frac{\partial B}{coſ.^2 B} = -\frac{p\, coſ.\, \beta\, \partial\beta}{ſin.^2\, \beta} = +\frac{p\, coſ.\, \beta\, \partial\alpha}{ſin.^2\, \beta},$$

$$\partial.\, tang.\, \gamma = \frac{\partial\gamma}{coſ.^2\, \gamma} = +\frac{\partial\alpha}{m\, coſ.^2\, \alpha}, \text{ et}$$

$$\partial.\, tang.\, \delta = \frac{\partial\delta}{coſ.^2\, \delta} = +\frac{\partial\beta}{m\, coſ.^2\, \beta} = -\frac{\partial\alpha}{m\, coſ.^2\, \beta}.$$

Quia vero tang. $A = \frac{p}{ſin.\, \alpha}$, erit coſ.$^2 A = \frac{ſin.^2\, \alpha}{p^2 + ſin.^2\, \alpha}$,

$$ſin.^2 A = \frac{p^2}{p^2 + ſin.^2\, \alpha}, \text{ eodemque modo}$$

$$coſ.^2 B = \frac{ſin.^2\, \beta}{p^2 + ſin.^2\, \beta}, \quad ſin.^2 B = \frac{p^2}{p^2 + ſin.^2\, \beta};$$

et ex triangulis ACD, BCD habetur:

$$coſ.\, \gamma = ſin.\, A\, coſ.\, \alpha = \frac{p\, coſ.\, \alpha}{\sqrt{(p^2 + ſin.^2\, \alpha)}},$$

$$coſ.\, \delta = ſin.\, B\, coſ.\, \beta = \frac{p\, coſ.\, \beta}{\sqrt{(p^2 + ſin.^2\, \beta)}}.$$

Qui valores in aequationibus differentialibus ſubſtituti praebent:

$$\partial A = -\frac{p\, coſ.\, \alpha\, \partial\alpha}{p^2 + ſin.^2\, \alpha}, \quad \partial B = +\frac{p\, coſ.\, \beta\, \partial\alpha}{p^2 + ſin.^2\, \beta},$$

$$\partial\gamma = +\frac{p^2\, \partial\alpha}{m\, (p^2 + ſin.^2\, \alpha)}, \quad \partial\delta = \frac{-p^2\, \partial\alpha}{m\, (p^2 + ſin.^2\, \beta)}:$$

Poſito

Poſito compendii cauſa,

$$m\,(p^2 + \text{ſin.}^2\,\alpha)\,(p^2 + \text{ſin.}^2\,\beta) = \text{N}, \text{ fiet}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = -\frac{m\,p\,\text{coſ.}\,\alpha\,(p^2 + \text{ſin.}^2\beta)}{\text{N}},\quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = +\frac{m\,p\,\text{coſ.}\,\beta\,(p^2 + \text{ſin.}^2\alpha)}{\text{N}},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = +\frac{p^2\,(p^2 + \text{ſin.}^2\beta)}{\text{N}},\quad \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} = -\frac{p^2\,(p^2 + \text{ſin.}^2\alpha)}{\text{N}};$$

unde ob $\frac{\partial s}{\partial \alpha} = 0$, eſſe debet, multiplicando per $\frac{\text{N}}{p}$,

$$m\,\text{coſ.}\,\alpha\,(p^2 + \text{ſin.}^2\,\beta) - m\,\text{coſ.}\,\beta\,(p^2 + \text{ſin.}^2\,\alpha)$$
$$- p\,(p^2 + \text{ſin.}^2\,\beta) + p\,(p^2 + \text{ſin.}^2\,\alpha) = 0, \text{ vel}$$

$$m\,p^2\,(\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}\,\beta) + m\,(\text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}^2\beta - \text{coſ.}\,\beta\,\text{ſin.}^2\alpha)$$
$$- p\,(\text{ſin.}^2\,\beta - \text{ſin.}^2\,\alpha) = 0, \text{ h. e.}$$

$$m\,p^2\,(\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}\,\beta) + m\,(\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}\,\beta)$$
$$+ m\,(\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}^2\,\alpha - \text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}^2\,\beta)$$
$$- p\,(\text{coſ.}^2\,\alpha - \text{coſ.}^2\,\beta) = 0, \text{ ſiue}$$

$$0 = (\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}\,\beta)\,[m\,(1 + p^2) + m\,\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta$$
$$- p\,(\text{coſ.}\,\alpha + \text{coſ.}\,\beta)],$$

vel diuidendo per $m\,q^2 = \frac{m}{n^2} = \frac{p}{n}$,

$$0 = (\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}\,\beta)\,[1 + n^2\,\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta$$
$$- n\,(\text{coſ.}\,\alpha + \text{coſ.}\,\beta)].$$

Bini iſti factores poſiti $= 0$, duplicem dabunt valorem ipſius α vel β, caſu Maximi vel Minimi. Erit nempe

I. $\text{coſ.}\,\alpha = \text{coſ.}\,\beta$; unde 1) $\alpha = \beta$, et 2) $\alpha = 360° - \beta$. Alter factor dat

$$n\,\text{coſ.}\,\alpha - n^2\,\text{coſ.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\alpha = 1 - n\,\text{coſ.}\,\beta,$$

unde fit

$$\text{coſ.}\,\alpha = \frac{1 - n\,\text{coſ.}\,\beta}{n - n^2\,\text{coſ.}\,\beta} = \frac{1}{n}, \text{ pariterque}$$

$$\text{coſ.}\,\beta = \frac{1 - n\,\text{coſ.}\,\alpha}{n - n^2\,\text{coſ.}\,\alpha} = \frac{1}{n}. \text{ Proinde}$$

 II.

II. $\cos.\alpha = \cos.\beta = \sec.a$; qui valor eſt impoſſibilis. Reſtant itaque priores duo caſus conſiderandi $\alpha = \beta$, et $\alpha = 360^\circ - \beta$. Disquiramus igitur, utrum ſuppoſitum $\alpha = \beta$ Maximum det an Minimum? Poſterius quidem locum habere, ſequentes iam innuent conſiderationes. Si triangulum A B C eſſet planum, ſumma angulorum A + B + C foret = 180°. Quia vero cuiuscunque trianguli ſphaerici tres anguli ſimul ſumti ſemper ſemicirculum excedunt, hancce differentiam = S — 180°, e curvatura laterum originem trahere oportet. Quo maior itaque laterum eſt curvatura, quo magis arcus A C, B C a chordis A C, B C differunt, eo maior iſta erit differentia, ſeu eo maior ſumma angulorum S. Patet autem, arcus A C, B C tanto fieri maiores, adeoque tanto magis a chordis ſuis differre, ſeu tanto magis incurvari, quanto longius vertex trianguli in circulo L R a puncto C, ubi A D = B D, removeatur. Vnde caſu $\alpha = \beta$ non poteſt S non eſſe Minimum. Calculus conſveto modo inſtitutus idem docebit. Erat

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{p(\cos.\beta - \cos.\alpha)[m q^2 + m \cos.\alpha \cos.\beta - p(\cos.\alpha + \cos.\beta)]}{m(p^2 + \sin.^2\alpha)(p^2 + \sin.^2\beta)},$$

cuius loco brevitatis ergo ponamus $\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{M}{N}$. Vnde erit

$$\frac{\partial \partial s}{\partial \alpha^2} = \frac{N \partial M - M \partial N}{N^2 \partial \alpha}.$$

Sed caſu $\alpha = \beta$ fit $M = 0$, unde disquiſitio valoris $\frac{\partial \partial s}{\partial \alpha^2}$ ad quaeſtionem reducitur, num $\frac{\partial M}{N \partial \alpha}$ valorem induat poſitivum an negativum; vel quoniam N ſemper poſitivum habet valorem, quaeſtio ad valorem ipſius $\frac{\partial M}{\partial \alpha}$ redit. Reperitur autem

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = p(\cos.\beta - \cos.\alpha)(m \cos.\alpha \sin.\beta - m \sin.\alpha \cos.\beta$$
$$+ p \sin.\alpha - p \sin.\beta) + p(\sin.\beta + \sin.\alpha) \times$$
$$\times (m q^2 + m \cos.\alpha \cos.\beta - p \cos.\alpha - p \cos.\beta).$$

Hinc caſu $\alpha = \beta$, ob $\cos.\beta - \cos.\alpha = 0$, fit

∂M

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = 2\,p\ \text{ſin.}\ \alpha\,(m\,q^2 + m\ \text{coſ.}^2\,\alpha - 2\,p\ \text{coſ.}\ \alpha)$$
$$= 2\,p^2\,q\ \text{ſin.}\ \alpha\,(1 - 2\,n\ \text{coſ.}\ \alpha + n^2\ \text{coſ.}^2\,\alpha).$$

Prior factor eſt affirmativus, quia ſemper $a < 90°$, α vero hic ponitur $= \frac{1}{2}\,c$. Alter factor quadratus eſt $= (1 - n\ \text{coſ.}\ \alpha)^2$, ſemper poſitivus. Vnde $\frac{\partial\partial s}{\partial \alpha^2}$ valorem habet poſitivum, et caſus $\alpha = \beta$ pro area trianguli A B C Minimum praebet.

Caſus ſecundus.

Vbi $\alpha = 360° - \beta$, coſ. β = coſ. α, ſin. β = — ſin. α, cum M, tum ∂ M evaneſcunt, ideoque $\frac{\partial\partial s}{\partial \alpha^2} = 0$. Caeterum calculo prolixo ad $\frac{\partial^4 s}{\partial \alpha^4}$ inveſtigandum requiſito ſuperſedere poſſumus, dum res ipſa loquitur, caſu $\alpha = 360° - \beta$, aream fieri Maximum. Puncto C ſcilicet ad R appropinquante area creſcit, quia in C erat Minimum, eandemque ob cauſam, dum punctum C eandem ſequens directionem per G et L rurſus tranſit ad C, aream iterum decreſcere oportet, unde non poteſt non habuiſſe ſemel valorem maximum.

Alterum hoc punctum F, ubi area fit Maximum, puncto D e diametro eſt oppoſitum. Erit nempe A B Q F = α, B Q F = β, unde A B Q F + B Q F = 360° = A B Q F + A E F, et A E F = B Q F, ideoque ob AD = BD, DEF = DQF.

Solutio itaque Problematis haec eſt:

Biſecetur baſis A B in D; per D et polum baſeos P ducatur circulus maximus D P F, occurrens Parallelo L R in punctis C et G, quorum prius pro vertice trianguli aſſumtum dabit Minimum, poſterius Maximum.

Poſterior quidem caſus negligi poteſt, ſiquidem ea duntaxat triangula ſphaerica conſiderari ſolent, quorum latera ſemicir-

micirculum non excedunt. Priore vero caſu erit ſimul A C = B C, cuius applicationem ad caſum ſatis obvium adhuc oſtendam.

Licet omne triangulum planum duobus angulis cognitis conſtrui poſſit (menſura nempe arbitraria aſſumta), in operationibus tamen geodaeticis omnes tres anguli menſurari ſolent, ut, ſi eorum ſumma 180° excedat, huius exceſſus (qui nonniſi errori in obſervatione commiſſo tribui ſolet) tertia pars a ſingulis angulis auferatur. Fateor equidem, differentiam iſtam maximam partem errore in operatione ipſa commiſſo gigni, quo ab errore peritiſſimus quisque Geodaeta prorſus ſibi cavere vix poterit. Attamen haud alienum videtur hic notaſſe, *integrum* iſtum errorem perperam ſoli operationi attribui.

Fig. 2. Sint A, B, C tria puncta in telluris ſuperficie, e quibus anguli B A C, A B C, A C B obſervantur. At anguli obſervati non ſunt chordis A B, A C, B C intercepti. Inſtrumento enim ſitus datur verticalis, atque normae dioptricali A D, A F, etc. ſitus horizontalis, unde patet, lineas viſionis A D, A F, eſſe tangentes arcuum A C, A B, obſervatosque eſſe angulos a tangentibus A D, A F, formatos, qui cum angulis ſphaericis B A C, etc. congruunt. Hinc ſequitur, ſummam trium angulorum quam accuratiſſime obſervatorum ſemper fore > 180°. Ob parvam, quam loca A, B, C, inter ſe tenere debent, quo ſingula bina e tertio ſpectari poſſint, diſtantiam, anguli D A F, etc. ab angulis C A B haud ſenſibiliter equidem diſcrepabunt, atque differentia vix unquam 20″ excedet. Veruntamen et hinc ſequitur, quod quidem plures aliae ſvadent rationes: determinata baſe vel ſtationis linea A B, punctum C optime ſic aſſumi, ut triangulum A C B, quantum fieri poſſit, fiat aequicrurum.

DE

DE CVRVA LOXODROMICA.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. die 14 Aug. 1786.

§. 1.

Curva Loxodromica, quam naves in mari deſcribere ſolent, eſt curva in ſphaerae ſuperficie ſecundum hanc legem deſcripta, ut ad omnes Meridianos ſub eodem angulo inclinetur, ſeu ut angulus, ſub quo Meridiani ab ea ſecantur, ſit conſtans. Quanti curvae huius notitia ſit momenti, non opus eſt dicere, ſiquidem praecipua artis nauticae problemata ad eam reducuntur, qualia ſunt e. gr. e ſitu binorum locorum A et B *curſum* inuenire, quem navis inde ab A ad B ſequi debeat, ſive angulum iſtum conſtantem determinare; porro e curſu quem navis tenuit, tempore elapſo, celeritate navis, (quae ambo coniuncta praebent locorum diſtantiam), ac ſitu loci A, locum B reperire, in quo navis iam verſatur, etc. Quorum omnium Problematum in Inſtitutionibus Nauticis, quas quidem novi, huiusmodi tantum docetur ſolutio, ut Loxodromia, Meridiani ac Paralleli ceu lineae rectae ſpectentur. Quantus hinc error neceſſario oriri debeat, imprimis ſi loca polo propinqua, vel ſi locorum diſtantia ingens, facile patet. Neque hic error plena-

plenarie tollitur conſtructione mapparum nauticarum ſingulari hunc in ſinem inventa. Quamobrem haud ſuperfluum duxi, in naturam Loxodromiae ſollertius inquirere, methodumque quaerere, haecce problemata rigoroſe ſolvendi.

Fig. 3. §. 2. Sit A locus, unde egreſſa navis petit locum B, AMB curva Loxodromica, DE Aequator, F polus, C ſphaerae centrum. Appellentur locorum A, B, M, latitudines, α, β, λ, ut ſit $AD = \alpha$, $BE = \beta$, $MN = \lambda$, differentia Meridianorum FA et FB, ſive angulus $AFB = \gamma$, $AFM = \psi$, angulus denique Loxodromiae cum Meridianis, quem quaerimus, $= \phi$.

Sumto iam elemento curvae Mm infinite parvo, captoque arcu $Fn = Fm$, orietur triangulum Mnm, quod pro rectilineo habere licet, in quo habemus: $mn = Mn \text{ tang. } \phi$. Eſt autem $mn = \text{coſ.}\, \lambda\, \partial \psi$, et $Mn = \partial \lambda$, unde fiet

$$\text{coſ.}\, \lambda\, \partial \psi = \text{tang.}\, \phi\, \partial \lambda, \text{ ſeu}$$

$$\partial \psi = \text{tang.}\, \phi\, \frac{\partial \lambda}{\text{coſ.}\, \lambda}.$$

Erit itaque ob ϕ conſtantem

$$\psi = \text{tang.}\, \phi \int \frac{\partial \lambda}{\text{coſ.}\, \lambda}.$$

Iam vero eſt

$$\frac{\partial \lambda}{\text{coſ.}\, \lambda} = \frac{\text{coſ.}\, \lambda\, \partial \lambda}{1 - \text{ſin.}^2 \lambda} = \frac{\partial . \text{ſin.}\, \lambda}{1 - \text{ſin.}^2 \lambda},$$

unde habemus integrando

$$\psi = \tfrac{1}{2} \text{ tang.}\, \phi \log. \frac{1 + \text{ſin.}\, \lambda}{1 - \text{ſin.}\, \lambda} + \text{Conſt.}$$

Cum itaque ſit

$$\sqrt{\frac{1 + \text{ſin.}\, \lambda}{1 - \text{ſin.}\, \lambda}} = \frac{1 + \text{ſin.}\, \lambda}{\text{coſ.}\, \lambda} = \text{ſec.}\, \lambda + \text{tang.}\, \lambda = \text{tang.}\, (45° + \tfrac{1}{2} \lambda),$$

invenitur

$$\psi = \text{tang.}\, \phi \log. \text{tang.}\, (45° + \tfrac{1}{2} \lambda) + \text{Conſt.}$$

Con-

Conſtans adiicienda inde determinatur, quod, ſi $\lambda = \alpha$, eſſe oporteat $\psi = 0$, unde erit

$$C = -\text{tang.}\,\Phi\ \text{log. tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha),\ \text{atque}$$

$$\psi = \text{tang.}\,\Phi\ [\text{log. tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - \text{log. tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)].$$

Quo hinc eruatur valor ipſius Φ, animadvertamus, poſito $\lambda = \beta$, fore $\psi = \gamma$. Erit itaque

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{\gamma}{\text{log. tang.}\ (45^\circ + \frac{1}{2}\beta) - \text{log. tang.}\ (45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Quodſi igitur $\alpha > \beta$, fiet $\Phi > 90^\circ$, quod per ſe patet. Si $\beta = \alpha$, erit $\Phi = 90^\circ$. Eodem vero caſu eſſe quoque debet $\lambda = \alpha = \beta$. Productum enim

$$\text{tang.}\,\Phi\ [\text{log. tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - \text{log. tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)],$$

cuius alter factor, tang. $\Phi = \infty$, nequit eſſe $= \psi$, vel aequalis quantitati finitae, niſi alter factor ſimul evaneſcat; unde ſequitur $\lambda = \alpha$. Quare ſi bina puncta A et B ſub eodem ſita fuerint Parallelo, Loxodromia in ipſum hunc Parallelum tranſit. Si denique ambo loca ſub eodem conſtituta ſint Meridiano, ſeu $\gamma = 0$, fit quoque $\Phi = 0$, h. e. via navis eſt ipſe Meridianus.

§. 3. Inſpiciamus iam, qualis proditura ſit aequatio inter tres coordinatas rectangulas, pro ipſa curva. Sit M Q ad planum Aequatoris perpendicularis, Q P in eodem plano ad radium C D normalis, appelletur $CP = x$, $PQ = y$, $QM = z$; atque poſito radio ſphaerae $CM = 1$, erit ex natura ſphaerae, $1 = xx + yy + zz$. Habemus praeterea $z =$ ſin. λ; $y = CQ$ ſin. $\psi =$ coſ. λ ſin. ψ; $x =$ coſ. λ coſ. ψ. Vnde fiet $\partial z =$ coſ. $\lambda\,\partial\lambda$;

$$\partial y = \text{coſ.}\,\lambda\ \text{coſ.}\,\psi\,\partial\psi - \text{ſin.}\,\lambda\ \text{ſin.}\,\psi\,\partial\lambda;$$

$$\partial x = -\text{coſ.}\,\lambda\ \text{ſin.}\,\psi\,\partial\psi - \text{ſin.}\,\lambda\ \text{coſ.}\,\psi\,\partial\lambda.$$

Supra autem invenimus coſ. $\lambda\,\partial\psi = \text{tang.}\,\Phi\,\partial\lambda$. Vnde oritur

$$\partial z = \text{coſ.}\,\lambda\,\partial\lambda;$$

$$\partial y = \text{tang.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\psi\,\partial\lambda - \text{ſin.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\psi\,\partial\lambda; \text{ et}$$

$$\partial x = -\text{tang.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\psi\,\partial\lambda - \text{ſin.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\psi\,\partial\lambda.$$

Eſt quoque $z\,\partial z = -x\,\partial x - y\,\partial y$, ſeu

$$\partial z = -\frac{x\,\partial x + y\,\partial y}{z}, \text{ proinde}$$

$$\partial\lambda = \frac{\partial z}{\text{coſ.}\,\lambda} = -\frac{x\,\partial x + y\,\partial y}{z\,\text{coſ.}\,\lambda}, \text{ quod praebet}$$

$$\partial y = -\frac{\text{tang.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\psi\,(x\,\partial x + y\,\partial y)}{z\,\text{coſ.}\,\lambda} + \frac{\text{ſin.}\,\psi\,\text{tang.}\,\lambda\,(x\,\partial x + y\,\partial y)}{z};$$

$$\partial x = \frac{\text{tang.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\psi\,(x\,\partial x + y\,\partial y)}{z\,\text{coſ.}\,\lambda} + \frac{\text{coſ.}\,\psi\,\text{tang.}\,\lambda\,(x\,\partial x + y\,\partial y)}{z}.$$

Hinc nanciſcimur

$$\text{ſin.}\,\psi\,\text{ſin.}\,\lambda - \frac{z\,\text{coſ.}\,\lambda\,\partial y}{x\,\partial x + y\,\partial y} = \text{tang.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\psi, \text{ et}$$

$$\frac{z\,\text{coſ.}\,\lambda\,\partial x}{x\,\partial x + y\,\partial y} - \text{coſ.}\,\psi\,\text{ſin.}\,\lambda = \text{tang.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\psi.$$

Priore per ∂x multiplicata cum poſteriore in ∂y ducta, in unam ſummam redacta, orietur

$$\text{ſin.}\,\psi\,\text{ſin.}\,\lambda\,\partial x - \text{coſ.}\,\psi\,\text{ſin.}\,\lambda\,\partial y$$
$$= \text{tang.}\,\Phi\,(\text{coſ.}\,\psi\,\partial x + \text{ſin.}\,\psi\,\partial y).$$

Vbi ſi ſubſtituantur valores ſupra inventi, coſ. $\psi = \frac{x}{\text{coſ.}\,\lambda}$, ſin. $\psi = \frac{y}{\text{coſ.}\,\lambda}$, ſin. $\lambda = z$, ac inſuper ponatur tang. $\Phi = a$, integra aequatione in coſ. λ ducta, habebimus

$$y\,z\,\partial x - x\,z\,\partial y = a\,(x\,\partial x + y\,\partial y) = -a\,z\,\partial z,$$

ideoque $x\,\partial y - y\,\partial x = a\,\partial z$.

Quae aequatio quo integrationem admittat, multiplicetur ea per $\frac{1}{xx + yy} = \frac{1}{1 - zz}$, ut ſit $\frac{x\,\partial y - y\,\partial x}{xx + yy} = \frac{a\,\partial z}{1 - zz}$, et integralibus ſumendis

$$\text{Arc. tang.}\,\frac{y}{x} = a\,\log.\,\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} + \text{Conſt.}$$

Quae

Quae aequatio tranſcendens cum illa: $1 = x^2 + y^2 + z^2$ iuncta, naturam curvae Loxodromicae exprimit. Inſervit haec aequatio curvae conſtruendae, h. e. omnibus locis intermediis determinandis, per quae navis tranſire debet, ſi nempe quaecunque latitudo λ inter α et β pro arbitrio aſſumatur, hincque $z = \text{ſin.}\,\lambda$ determinetur, et ope aequationis quaerantur x et y.

Ad determinandam conſtantem ponatur $y = 0$, quo caſu eſſe debet $\lambda = \alpha$, et $z = \text{ſin.}\,\alpha$, proinde

$$\text{Arc. tang.}\,\frac{y}{x} = 0 = a \log. \sqrt{\frac{1 + \text{ſin.}\,\alpha}{1 - \text{ſin.}\,\alpha}} + C,$$

unde ut ſupra colligitur

$$C = -\,\text{tang.}\,\Phi \log. \sqrt{\frac{1 + \text{ſin.}\,\alpha}{1 - \text{ſin.}\,\alpha}}.$$

Ceterum eſt $\frac{y}{x} = \frac{\text{coſ.}\,\lambda\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{coſ.}\,\lambda\,\text{coſ.}\,\psi} = \text{tang.}\,\psi$, ideoque Arc. tang. $\frac{y}{x} = \psi$, unde ob $z = \text{ſin.}\,\lambda$ et $a = \text{tang.}\,\Phi$, noſtra aequatio fit:

$$\psi = \text{tang.}\,\Phi \log. \sqrt{\frac{1 + \text{ſin.}\,\lambda}{1 - \text{ſin.}\,\lambda}}$$

$$= \text{tang.}\,\Phi \log. \text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) + C.,$$

quae perfecte congruit cum ea, quam ſupra invenimus (§. 2.).

§. 4. Quoad uſum formulae pro ψ et tang. Φ ſupra inventae (§. 2.) notari oportet, logarithmos ibidem adhibitos eſſe *naturales*, et arcum γ in partibus radii $= 1$ eſſe exprimendum. Vocetur logarithmus naturalis numeri $10 = \mu$, ut ſit $\mu = 2,302585 \ldots\ldots$, eritque modulus logarithmorum *Briggianorum* $= \frac{1}{\mu} = 0,43429448 \ldots\ldots$ Tunc, ſi logarithmos vulgares charactere L deſignatos in calculo adhibere velimus, erit

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{\gamma \cdot 0,43429448 \ldots\ldots}{\text{L. tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) - \text{L. tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}, \text{ et}$$

 $\psi =$

$$\psi = \frac{\text{tang.}\,\Phi\,(\text{L. tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta) - \text{L. tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)}{0{,}43429448\ldots},$$

vel

$$\psi = \text{tang.}\,\Phi.\,2{,}302585\ldots[\text{L. tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta) - \text{L. tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)].$$

Cum in mari raro contingat, longitudinem per obſervationes aſtronomicas determinare, ideoque plerumque ſoleat longitudo per calculum nauticum reperta ope latitudinis obſervatae corrigi, haec poſtrema formula vulgari methodo longe accuratior non ſine inſigni utilitate hic adhiberi poſſet, inprimis cum calculo per logarithmos inſtituendo maxime ſit adaptata. Si nempe arcus ψ in minutis ſecundis expreſſus dicatur ψ'', et numerus minutorum ſecundorum, quae arcus radio aequalis continet, ponatur $= \nu$, ut ſit $\nu = 206264'',8$; erit $\psi'' = \nu\,\psi$, unde ob L. $\nu = 5{,}3144251$, et L. $2{,}302585 = 0{,}3622156$, erit L. $\psi'' =$ L. $\nu +$ L. ψ, ſeu

$$\text{L.}\,\psi'' = 5{,}6766407 + \text{L. tang.}\,\Phi + \text{L.}\,[\text{L. tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\beta) - \text{L. tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha)],$$

in qua formula Φ eſt curſus navis, α et β latitudines per obſervationem cognitae, ψ variatio longitudinis.

Prior formula pro tang.Φ dat curſum, quem navis tenere debet, ut a latitudine α ad latitudinem β perveniat, et ſimul longitudinis variatio ſit $= \gamma$, quae ope tabularum ſatis obviarum in partibus radii eſt exprimenda.

§. 5. Quantopere haec methodus accuratior ſit methodis in navigatione ſic dicta *plana* uſitatis, etiamſi hic correctio adhibeatur, qua differentia longitudinum in ratione coſinuum latitudinis minuitur, facile patet. Iſta vero methodus, quae mappis nititur ab *Eduardo Wright* inventis, cuiusque calculus ope

ope ſummae ſecantium pro ſingulis minutis, vel, uti nautae loquuntur, ope *partium meridionalium* inſtituitur, cum noſtra formula plerumque ſatis exacte convenit: quod uno exemplo oſtendere haud e re erit. Sit igitur $\alpha = 20°$, $\beta = 52°$, $\gamma = 16°$, erit pro noſtra formula $\gamma = 0,2792527$, $45° + \frac{1}{2}\beta = 71°$, $45° + \frac{1}{2}\alpha = 55°$. Proinde

$$\begin{array}{rl} \text{L. tang.}\ (45° + \frac{1}{2}\beta) = & 0,4630281 \\ \text{L. tang.}\ (45° + \frac{1}{2}\alpha) = & 0,1547732 \\ \hline \text{Denominator} = & 0,3082549 \\ \hline \text{L.}\ \gamma = & 9,4459974 \\ \text{L.}\ \frac{1}{\mu} = & 9,6377843 \\ \hline \text{L. Numeratoris} = & 9,0837817 \\ \text{L. Denominatoris} = & 9,4889100 \\ \hline \text{L. tang.}\ \Phi = & 9,5948717. \quad \Phi = 21°.\ 28'.\ 35''. \end{array}$$

At ex methodo vulgari calculus ſic inſtituitur:

$$\begin{array}{lr} \beta \text{ in part. meridionalibus} = & 3665,2. \\ \alpha \ \text{- - - - -} = & 1225,1. \\ \hline \beta - \alpha \ \text{- - - -} = & 2440,1 \\ \gamma = 60.16 = \ \text{- - -} & 960 \\ \hline \end{array}$$

Quia iam ponitur $\text{tang.}\ \Phi = \frac{\gamma}{\beta - \alpha}$, erit

$$\begin{array}{rl} \text{L.}\ \gamma = & 2,9822712 \\ \text{L.}\ (\beta - \alpha) = & 3,3874076 \\ \hline \text{L. tang.}\ \Phi = & 9,5948636;\ \text{et}\ \Phi = 21°.\ 28'.\ 33'',6. \end{array}$$

 Addi-

Addition
au troiſiéme Mémoire ſur le mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible, inſeré au Tom. III. des Nouveaux Actes,

par

Jacques Bernoulli.

J'avois déja entiérement perdu de vue ce Mémoire, & j'étois livré à une occupation tout-à-fait étrangère, quand la penſée me paſſa par la tête de ce qui pouvoit m'avoir conduit à des reſultats auſſi contradictoires & auſſi inexplicables que ceux qu'on y trouve. En effet j'y avois commis une faute, pour laquelle je puis eſperer de l'indulgence par la conſidération, que ce Mémoire avoit été compoſe pendant le commencement & la reconvaleſcence d'une maladie, dont mes facultés intellectuelles & phyſiques avoient également ſouffert: & quoique dans la ſuite je ſoupçonnai toûjours fortement d'avoir commis quelque faute, je ne la découvris point, comme cela arrive aſſés ſouvent, à force de la chercher avec attention là où elle n'étoit pas.

La faute conſiſte donc en ce qu'après avoir reduit le mouvement gyratoire ou turbinatoire à trois mouvemens rectilignes, paralèles à trois axes principaux, perpendiculaires entre eux, je n'avois pas fait attention, qu'alors la force centrifuge ne doit plus être conſidérée, puisqu'en effet il n'y en a point dans le mouvement rectiligne. Il ſuit delà, que nos équa-

équations fondamentales du §. 6. deviennent beaucoup plus ſimples, ſavoir

$$(A)\quad \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = 2g - \frac{2gP\zeta x}{M\theta(a+\zeta)},$$

$$(B)\quad \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = \quad - \frac{2gP\zeta y}{M\theta(a+\zeta)},$$

$$(C)\quad \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = \quad - \frac{2gP\zeta z}{M\theta(a+\zeta)}:$$

&, en ſubſtituant pour x, y, z, & leurs différences, les valeurs trouvées dans le §. 11, on obtient ces trois nouvelles équations :

$$(D)\quad \frac{\partial\partial\zeta\, cof.\,\delta - a\,\partial\partial\psi\, fin.\,\delta}{\partial t^2} = 2g - \frac{2gP\zeta\, cof.\,\delta}{M\theta},$$

$$(E)\quad \frac{\partial\partial\zeta\, fin.\,\delta\, cof.\,\omega + a\,\partial\partial\psi\, cof.\,\delta\, cof.\,\omega - a\,\partial\omega^2\, fin.\,\delta\, cof.\,\omega - a\,\partial\partial\omega\, fin.\,\delta\, fin.\,\omega}{\partial t^2}$$
$$= - \frac{2gP\zeta\, fin.\,\delta\, cof.\,\omega}{M\theta},$$

$$(F)\quad \frac{\partial\partial\zeta\, fin.\,\delta\, fin.\,\omega + a\,\partial\partial\psi\, cof.\,\delta\, fin.\,\omega - a\,\partial\omega^2\, fin.\,\delta\, fin.\,\omega + a\,\partial\partial\omega\, fin\,\delta\, cof.\,\omega}{\partial t^2}$$
$$= - \frac{2gP\zeta\, fin.\,\delta\, fin.\,\omega}{M\theta}.$$

En prenant (E) ſin. ω — (F) coſ. ω, on verra que $\partial\partial\omega = 0$, & par conſequent la viteſſe turbinatoire conſtante, ou $\partial t = m\,\partial\omega$, ou (d'après le §. 18.) $\partial t = \partial\omega\sqrt{\frac{a\, cof.\,\delta}{2g}}$.

Effaçons donc les termes, où il y a $\partial\partial\omega$, & mettons $m\,\partial\omega$ au lieu de ∂t, on aura en prenant

$$(D)\times cof.\,\delta + (E)\times\frac{fin.\,\delta}{cof.\,\omega}:$$

$$\frac{\partial\partial\zeta}{mm\,\partial\omega^2} - \frac{a\, fin.\,\delta^2}{mm} = 2g\, cof.\,\delta - \frac{2gP\zeta}{M\theta},$$

& delà, par une double intégration, en faiſant

$$\frac{2g\, cof.\,\delta}{A} + \frac{a\, fin.\,\delta^2}{mmA} = \alpha,$$

& $\frac{gP}{M\theta A} = \beta$, où A eſt la conſtante introduite par la première intégration :

$$I.\quad \zeta = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}}{2\beta}\times cof.\, m(\omega - B)\sqrt{2A\beta}.$$

En

En ſubſtituant cette valeur & celle de $\partial\partial\zeta$, qui devient

$$\partial\partial\zeta = mm\mathrm{A}\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}\times\partial\omega^2\times\mathrm{coſ.}\,m(\omega-\mathrm{B})\sqrt{2\mathrm{A}\beta},$$

dans l'équation (E), on aura :

$$\mathrm{A\,ſin.}\,\delta\,\mathrm{coſ.}\,\omega\times\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}\times\mathrm{coſ.}\,m\,(\omega-\mathrm{B})\sqrt{2\mathrm{A}\beta} + \frac{a\,\partial\partial\psi\,\mathrm{coſ.}\,\delta\,\mathrm{coſ.}\,\omega}{mm\,\partial\omega^2} - \frac{a\,\mathrm{ſin.}\,\delta\,\mathrm{coſ.}\,\omega}{mm} = -\frac{g\,\mathrm{P}\,\alpha\,\mathrm{ſin.}\,\delta\,\mathrm{coſ.}\,\omega}{\beta\mathrm{M}\theta} + \frac{g\,\mathrm{P}\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}}{\beta\mathrm{M}\theta}\times\mathrm{ſin.}\,\delta\,\mathrm{coſ.}\,\omega\,\mathrm{coſ.}\,m\,(\omega-\mathrm{B})\sqrt{2\mathrm{A}\beta}.$$

Diviſant par coſ. ω, & intégrant encore deux fois, on obtient l'autre équation :

$$\text{II. } a\psi\,\mathrm{coſ.}\,\delta = \mathrm{D}+\mathrm{C}\omega+\left(a\,\mathrm{ſin.}\,\delta-\frac{g\,\mathrm{P}\,\alpha\,mm\,\mathrm{ſin.}\,\delta}{\beta\mathrm{M}\theta}\right)\tfrac{1}{2}\omega\omega - \left[\frac{g\,\mathrm{P}\,\mathrm{ſin.}\,\delta\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}}{2\mathrm{A}\beta\beta\mathrm{M}\theta}-\frac{\mathrm{ſin.}\,\delta}{2\beta}\sqrt{(\alpha\alpha+4\beta)}\right]\times \times\,\mathrm{ſin.}\,m\,(\omega-\mathrm{B})\sqrt{2\mathrm{A}\beta},$$

où après avoir ſubſtitué les valeurs des lettres α, β, et m, les deux derniers termes s'évanouïſſent, deſorte qu'on obtient ſimplement :

$$\text{II. } a\psi\,\mathrm{coſ.}\,\delta = \mathrm{D}+\mathrm{C}\omega,\ \text{ou}\ \psi = \mathrm{D}+\mathrm{C}\omega.$$

Comme cette équation, quelque ſimple qu'elle ſoit, ne ſatisfait point encore, puiſque l'angle ψ, qui doit reſter renfermé entre de très étroites bornes, augmenteroit à l'infini; voyons ſi une autre erreur ne conſiſte pas en ce qu'on a rejetté trop de termes, où ce ψ entre. C'eſt pourquoi mettons

$$\mathrm{ſin.}\,(\delta+\psi) = \mathrm{ſin.}\,\delta+\psi\,\mathrm{coſ.}\,\delta,\ \text{et}$$
$$\mathrm{coſ.}\,(\delta+\psi) = \mathrm{coſ.}\,\delta-\psi\,\mathrm{ſin.}\,\delta,$$

enſorte qu'on ait $x = a\,\mathrm{coſ.}\,\delta - a\psi\,\mathrm{ſin.}\,\delta$,

$$\partial\partial x = \partial\partial\zeta\,(\mathrm{coſ.}\,\delta-\psi\,\mathrm{ſin.}\,\delta) - a\,\partial\partial\psi\,(\mathrm{ſin.}\,\delta+\psi\,\mathrm{coſ.}\,\delta).$$

Subſtituons ces valeurs, et celles qu'on a trouvées pour ζ et ∂∂ζ,

$\partial\partial\zeta$, dans l'équation (D), elle deviendra:

$$A\,(\text{coſ.}\,\delta - \psi\,\text{ſin.}\,\delta)\,\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} \times \text{coſ.}\,m\,(\omega - B)\sqrt{2A\beta}$$
$$- \frac{\alpha\,\partial\partial\psi\,(\text{ſin.}\,\delta + \psi\,\text{coſ.}\,\delta)}{m\,m\,\partial\,\omega^2} = 2g - \frac{g\,P\,\alpha}{M\,\theta\,\beta}(\text{coſ.}\,\delta - \psi\,\text{ſin.}\,\delta)$$
$$+ \frac{g\,P}{M\,\theta\,\beta}(\text{coſ.}\,\delta - \psi\,\text{ſin.}\,\delta)\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} \times \text{coſ.}\,m\,(\omega - B)\sqrt{2A\beta},$$

et en remettant pour α, β, et m leurs valeurs, pluſieurs termes ſe detruiſent, et on obtient

$$\partial\,\partial\,\psi\,(\text{ſin.}\,\delta + \psi\,\text{coſ.}\,\delta) = -\,\psi\,\partial\,\omega^2\,\text{ſin.}\,\delta\,,$$

où l'on voit à-préſent clairement la raiſon, pourquoi il a fallu garder les valeurs ψ coſ. δ et ψ ſin. δ, parcequ'autrement le $\partial\,\partial\,\psi$ devient $= 0$. Ce n'eſt donc quà-préſent qu'on peut réjetter encore le terme $\psi\,\partial\,\partial\,\psi$ coſ. δ, ce qui laiſſe ſimplement: $\partial\,\partial\,\psi = -\,\psi\,\partial\,\omega^2$, dont l'intégrale complète eſt

$$\omega = A.\,\text{ſin.}\,\frac{\psi}{c} - D, \text{ ou } \psi = C\,\text{ſin.}\,(\omega + D).$$

Subſtituant auſſi dans l'équation de ζ les valeurs de α, β, m, on trouve:

$$\text{I. } \zeta = \frac{M\,\theta}{P\,\text{coſ.}\,\delta} + \sqrt{\left(\frac{M^2\,\theta^2}{P^2\,\text{coſ.}\,\delta^2} + \frac{M\,\theta\,A}{g\,P}\right)} \times \text{coſ.}\,(\omega - B)\sqrt{\frac{P\,\alpha\,\text{coſ.}\,\delta}{M\,\theta}}\,,$$

l'autre équation étant

$$\text{II. } \psi = C\,\text{ſin.}\,(\omega + D).$$

Nous voici donc enfin parvenus à deux équations ſatisfaiſantes, propres à expliquer le mouvement turbinatoire du corps. Les quatre conſtantes A, B, C, D ſe déterminent facilement par l'extenſion ζ du fil, par ſon angle $\delta + \psi$ avec l'axe vertical, et par les viteſſes, tant nutatoire $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ou $\frac{\partial\psi}{m\,\partial\,\omega}$, que dans la direction du fil $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, telles que toutes ces quantités feront ſuppoſées au commencement du mouvement, quand $\omega = 0$. Où l'on voit, que s'il doit y avoir réellement un petit angle variable ψ, la conſtante C ſera un angle infiniment

ment petit, et l'angle ψ initial avec la viteſſe $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ initiale ne pourront pas tous deux être $= 0$, parcequ'autrement C ſe réduit à rien, & qu'il n'y a pas de mouvement nutatoire.

Puisque $\partial \partial \psi = - C \partial \omega^2 \text{ſin.} (\omega + D)$, & que C eſt infiniment petit, on voit que $\partial \partial \psi$ eſt dans un rapport infiniment petit avec $\partial \omega^2$, tandis que $\partial \partial \zeta$ eſt dans un rapport fini avec $\partial \omega^2$; par conſéquent $\partial \partial \psi \text{ ſin.} \delta$ & $\psi \partial \omega^2 \text{ ſin.} \delta$ ſont des infiniment-petits du troiſième ordre, le terme $\psi \partial \partial \psi \text{ coſ.} \delta$ étant du quatrième; & c'eſt pourquoi on a pu le négliger dans l'équation

$$\partial \partial \psi (\text{ſin.} \delta + \psi \text{ coſ.} \delta) = - \psi \partial \omega^2 \text{ ſin.} \delta.$$

Mais il reſte une difficulté eſſentielle, c'eſt qu'étant obligé de retenir dans l'expreſſion de x le terme affecté de ψ, on doit auſſi retenir le terme affecté de ζ, & faire

$$x = a \text{ coſ.} \delta - a \psi \text{ ſin.} \delta + \zeta \text{ coſ.} \delta;$$

que de plus dans $\frac{\zeta x}{a + \zeta}$ il n'eſt pas permis de négliger entièrement le ζ du dénominateur, mais qu'on doit faire $\frac{\zeta x}{a + \zeta} = \frac{\zeta x}{a} - \frac{\zeta \zeta x}{a a}$, & ſe contenter dans ce ſecond petit terme de prendre $x = a \text{ coſ.} \delta$. Cette objection eſt ſans doute très ſolide: auſſi j'ai refait le calcul pour y ſatisfaire, mais j'ai trouvé que tous les autres termes ſe détruiſant mutuellement, on étoit encore ramené à cette équation $\partial \partial \psi = - \psi \partial \omega^2$, ou $\psi = C \text{ ſin.} (\omega + D)$.

EX-

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTENUS DANS CE VOLUME.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE

I.

Evolutio formulae integralis $\int \partial x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx}\right)$, a termino $x = 0$ vſque ad $x = 1$ extenſae.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

Dans un mémoire intitulé: *Obſervationes de progreſſionibus harmonicis*, qui ſe trouve dans le 7e volume des Commentaires de l'Académie pour les années 1734 & 1735, feu M. Euler avoit dejà fait des recherches ſur la ſomme de la progreſſion harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{i}$, & il l'avoit trouvée $= l(i+1) + C$, i étant un nombre infiniment grand & $C = 0{,}57721$ une conſtante introduite par l'intégration, & qui exprime par conſéquent la différence entre la ſomme de la ſerie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\infty}$ & $l\,\infty$.

M. Euler a pouſſé plus loin cette recherche dans la ſuite, dans ſon ouvrage: *Inſtitutiones Calculi Differentialis*, où l'on trouve, dans le 6e chapitre de la ſeconde ſection, qui traite: *De ſummatione progreſſionum per ſeries infinitas*, le calcul de la conſtante C pouſſé jusqu'à 16 décimales, ſavoir $C = 0{,}5772156649015325$. (Inſt. Calc. Diff. pag. 444.).

Ce nombre C, trouvé par approximation, avoit paru a M. Euler aſſez remarquable pour l'engager à en faire le

 ſujet

ſujet d'un mémoire plus récent, inſéré dans le ſecond volume des Actes de l'Académie, pour l'année 1781, où notre Géomètre a tâché de reduire ce nombre à une expreſſion connue. Il y a donné pour cet effet pluſieurs ſéries aſſez convergentes & régulières dont ce nombre C eſt la ſomme, & entre autres il y a démontré que C eſt la valeur de l'intégrale $\int \partial x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx}\right)$, priſe depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Or n'ayant pu réuſſir, dans le mémoire mentionné, à reduire ce nombre C à une quantité tranſcendante dejà connue, ſon but eſt d'examiner ici, ſi la réſolution de cette formule intégrale ne menera pas à quelque réſultat plus ſatisfaiſant.

Il eſſaye premierement la voye des Quadratures, en conſidérant une ligne courbe dont l'abſciſſe eſt x & l'ordonnée $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx}$. Il en examine la figure ſingulière, ce qui, quoiqu'il ne contribue rien à la connoiſſance plus parfaite du nombre C repréſenté par un eſpace déterminé de cette courbe, n'eſt pas pourtant déſtitué de tout intérêt.

L'Auteur eſſaye, après cet examen, pluſieurs transformations en ſéries, qui, quoique très-inſtructives & neuves en partie, conduiſent à des ſéries ni de forme connue ni aſſez couvergentes pour qu'on pût en tirer quelque avantage pour la connoiſſance plus parfaite du nombre en queſtion.

II.

Vberior explicatio methodi ſingularis nuper expoſitae integralia alias maxime abſcondita inueſtigandi.

Auctore *L. Eulero*, pag. 17.

Il n'y a pas longtems que le calcul intégral a été enrichi de la méthode de traiter les formules differentielles qui ſont

ſont diviſées par le logarithme de la quantité variable. Feu M. Euler, à qui cette branche des ſciences mathematiques eſt rédevable de ſes plus brillans progrès, dit dans un de ſes mémoires : *Cum ſaepius mihi occurriſſent formulae differentiales, quae per logarithmum quantitatis variabilis erant diuiſae, veluti* $\frac{P\partial z}{lz}$, *nunquam perſpicere potui, ad quodnam genus quantitatum earum integralia ſint referenda.* (V. Nou. Comment. Tom. XIX. pag. 66.). Cependant il s'eſt frayé un nouveau chemin dans le même mémoire intitulé: *Noua methodus quantitates integrales determinandi*, & il y a donné l'intégrale de pluſieurs pareilles formules, & entre autres auſſi de celle-ci: $\int \frac{x^a - x^b}{lx} . \partial x$, dont il a trouvé, par une méthode tout-à-fait nouvelle, l'intégrale, priſe depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, égale à $l \frac{a+1}{b+1}$.

Cette nouvelle méthode de déterminer les intégrales de beaucoup de formules qui ſe refuſent à toute autre voye d'intégration, a paru à M. Euler ſuſceptible de bien plus de généraliſation, & propre, par là même, à avancer les bornes du calcul intégral. C'eſt le but de ce mémoire qui mérite à tous égards l'attention des Géomètres, mais qui n'eſt pas ſuſceptible d'extrait, étant tout heriſſé de calculs, & de calculs inintelligibles, ſans une explication préalable des nouveaux caractères que l'Auteur s'eſt vu obligé d'introduire, afin de rendre ſes recherches plus courtes & plus lumineuſes. Explication que les connoiſſeurs aimeront mieux chercher, ainſi que l'eſprit de la méthode, dans le mémoire même, où nous les renvoyons.

III.

III.

Analyſis facilis & plana ad eas ſeries maxime abſtruſas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non ſolum radices ipſae, ſed etiam quaeuis earum poteſtates exprimi poſſunt.

Auctore *L. Eulero*, pag. 55.

Feu M. Lambert avoit donné autrefois, dans le troiſième volume des *Acta Helvetica*, pag. 154, une ſérie qui exprime la racine de l'équation trinomiale $a\,x^{\varkappa} + b\,x^{\lambda} = d$, dont la loi de progreſſion eſt bien ſimple, mais qui eſt fondée en partie ſur des inductions & dépourvue de toute démonſtration.

Cette matière avoit fourni à feu M. Euler l'occaſion de traiter le même ſujet dans un mémoire inſéré au XVe volume des nouveaux Commentaires, où il a démontré que non ſeulement la racine d'une équation algébrique quelconque, mais auſſi les puiſſances de cette racine peuvent être exprimées par de ſemblables ſéries. Dans le mémoire mentionné, intitulé: *Obſeruationes circa radices aequationum*, l'illuſtre Géomètre cherche d'abord la ſérie qui exprime la plus grande racine de l'équation: $1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$, & il en déduit, par induction, celle pour l'équation $1 = \frac{A}{x^{\lambda}} + \frac{B}{x^{\mu}}$. De là il paſſe aux équations quadrinomes & enfin aux équations d'un nombre de termes quelconque.

Dans le préſent mémoire l'Auteur traite le même ſujet, mais d'une autre manière, & en partant d'un principe entièrement

rèment différent. Afin de donner une idée de cette méthode changeons l'équation mentionnée trinomiale en celle-ci : $Z^n = Z^{n-\alpha} + C\,Z^{n-\beta}$ & il eſt clair que la puiſſance n^{me} de la racine doit être exprimable par une ſérie compoſée d'une infinité determes, dout chacun eſt une certaine fonction de l'expoſant n. En mettant donc

$$Z^n = f^\circ : n + f' : n + f'' : n + \&c.$$
$$Z^{n-\alpha} = f^\circ : (n-\alpha) + f' : (n-\alpha) + f'' : (n-\alpha) + \&c.$$
$$Z^{n-\beta} = f^\circ : (n-\beta) + Cf_{,} : (n-\beta) + Cf'' : (n-\beta) + \&c.$$

ces fonctions indefinies devront être determinées de manière que

$$f' : n - f' : (n-\alpha) = C f^\circ : (n-\beta)$$
$$f'' : n - f'' : (n-\alpha) = C f' : (n-\beta)$$
$$f''' : n - f''' : (n-\alpha) = C f'' : (n-\beta)$$
$$\&c. \qquad \qquad \&c.$$

Moyennant ces équations on eſt en état de déterminer la fonction $f' : n$ de façon qu'elle ſatisfaſſe à la premiere équation ; d'où l'on déduit la fonction $f : (n - \beta)$, & de là, par la ſeconde équation, la fonction $f'' : n$ qui donne $f'' : (n-\beta)$, & ainſi on continue de procéder jusqu'à ce que la loi de progreſſion devient évidente. Tout revient donc à trouver, par une fonction propoſée de n, une autre fonction $\phi : n$, de manière que $\phi : n - \phi : (n - \alpha) = N$, ce que l'auteur enſeigne à effectuer dans une ſuite de Lemmes qui facilitent non ſeulement l'invention de la ſérie pour la puiſſance n^{me} de la racine Z, mais qui ſont en eux-mêmes très propres à repandre du jour ſur la théorie des fonctions.

Après avoir trouvé de cette manière la ſérie pour une puiſſance quelconque *n* de la racine de l'équation trinomiale, l'auteur applique ſa méthode à une équation de quatre termes, & finit par montrer de quelle manière on peut s'en ſervir pour des équations polynomes quelconques.

Quant à la ſérie de Lambert, qu'il nous ſoit permis de rappeller aux Géometres un mémoire de feu M. Euler qui ſe trouve dans les Actes de l'Académie pour le ſecond ſemeſtre de l'année 1779, où il a montre pluſieurs propriétés remarquables dont cette ſérie eſt douée.

IV.

De innumeris generibus ſerierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum non ſolum radices ipſae, ſed etiam quaecunque earum poteſtates exprimi poſſunt.

Auctore *L. Eulero.* Pag. 74.

Nous avons déjà fait mention, dans le précédent extrait, d'un mémoire que notre illuſtre Géomètre avoit donné dans le XVe. Volume des nouveaux commentaires, ſur le même ſujet qu'il traite ici & dans la diſſertation précédente. Il y avoit montré qu'on peut non ſeulement exprimer la racine, mais une puiſſance quelconque de la racine d'une équation algébrique quelconque par une ſérie infinie aſſez ſimple & d'un loi de progreſſion aſſez évidente. Ici il va plus loin, comme on va voir par l'expoſition ſuivante du contenu de ce mémoire.

Soit

Soit l'équation propoſée déjà reduite à cette forme:

$$1 = \frac{A}{x^{\alpha}} + \frac{B}{x^{\beta}} + \frac{C}{x^{\gamma}} + \&c.,$$

où les expoſans α, β, γ, &c. ſont des nombres quelconques poſitifs ou négatifs, entiers ou rompus, & A, B, C, &c. des coéfficiens doués de tant de dimenſions que l'homogéneité exige, c'eſt à dire d'autant que les expoſans α, β, γ, &c. indiquent. Et il eſt d'abord clair que dans la ſérie qui doit exprimer la puiſſance n^{me} de la racine x, le premier terme ſera $A^{\frac{n}{\alpha}}$ & que tous les autres termes ſeront compoſés des autres lettres B, C, D, &c. tant ſeules que combinées entre-elles. On pourra donc les ranger en differentes claſſes; la premiere ſera formée des tennes qui contiennent les lettres B, C, D, &c. ſimplement; la ſeconde de ceux qui contiennent les quarrés de ces nombres & leurs produits de deux à deux; la troiſième claſſe renfermera les termes ou ces lettres ſeront combinées trois à trois, & ainſi de ſuité. M. Euler avoit deja donné, dans le mémoire cité du XV[e] Volume des nouveaux Commentaires, des regles pour la formation des termes de chaque claſſe, qu'il expoſe auſſi de nouveau dans le mémoire préſent, mais d'une maniere beaucoup plus générale & en même tems plus ſimple. Mais ce qui rend ce mémoire ſurtout intéreſſant, c'eſt que ſon celebre Auteur y a reuſſi à démontrer rigoureuſement ces regles, & par conſéquent la verité de ſes ſéries, qui dans le mémoire antérieur, dont nous venons de parler, avoient le défaut d'être non ſeulement fondées ſur une méthode extrémement indirecte, mais à laquelle l'induction avoit auſſi outre cela beaucoup plus de part qu'on n'aime à lui accorder en pareilles matières.

V.
De binis curuis algebraicis inueniendis, quarum arcus indefinite inter ſe ſint aequales.

Auctore *L. Eulero.* Pag. 96.

En deſignant par X & x les abſciſſes, & par Y & y les ordonnées de deux courbes algébriques, le Problème géometrique que feu M. Euler traite ici dans ce mémoire, ſe reduit à cette queſtion purement analytique: Quelles ſont les quatre fonctions algébriques d'une nouvelle variable z, qu'il faut prendre pour X, Y, x, y, afin que

$$\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial x^2 + \partial y^2.$$

En mettant

$$X = p + q; \quad x = p - q;$$
$$Y = r - s; \quad y = r + s;$$

cette condition ſe reduit à la ſuivante: $\partial p \, \partial q = \partial r \, \partial s$, qu'on peut remplir, comme l'Auteur obſerve, d'une infinité de manières, ſi l'on veut ſe contenter de ſolutions particulieres.

Quant à la ſolution générale du Problème, M. Euler en donne deux. La premiere ſe reduit aux règles ſuivantes: 1°.) A la place de q & r prenez deux fonctions quelconques algébriques de z & faites $u = \frac{\partial q}{\partial r}$. 2°.) Prenez pour $\int p \, \partial u = v$ auſſi une fonction quelconque algébrique de z & 3°.) donnez à p & s les valeurs ſuivantes: $p = \frac{\partial v}{\partial u}$, $s = \frac{u \, \partial v}{\partial u} - v$ & les coordonnées des deux courbes cherchées ſeront

$$X = \frac{\partial v}{\partial u} + q; \qquad x = \frac{\partial v}{\partial u} - q;$$
$$Y = r - \frac{u \, \partial v}{\partial u} + v; \quad y = r + \frac{u \, \partial v}{\partial u} - v.$$

De

De cette maniere, ajoute l'Auteur, ſi les trois fonctions arbitraires q, r & v pouvoient être priſes de manière que l'une des deux courbes fût une courbe déterminée, par exemple l'Ellipſe, ou l'Hyperbole, il ſeroit dans notre pouvoir de trouver, moyennant cette ſolution, une autre courbe, dont un arc fut égal en longueur à un arc de l'une ou de l'autre des deux courbes mentionnées données: Mais il doute que l'Analyſe puiſſe jamais atteindre ce degré de perfection.

La ſeconde ſolution, pour être générale, ſuppoſe poſſible la réſolution des équations algébriques de tout ordre. Car l'Auteur obſerve que mettant $\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial r} = z$ quelque équation algébrique qu'on adopte autre p & s, de même qu'entre q & r, on aura p & s auſſi bien que q & r exprimées par des fonctions de la même variable z. Cette ſolution cede donc le rang à la premiere. Cependant elle n'eſt pas ſans utilité, puis qu'elle fournit un moyen très-ſimple & très-élégant de conſtruire les deux courbes dont deux arcs pris indéfiniment ſont de la même longueur.

VI.
Solutio Problematis ex methodo tangentium inuerſa.

Auctore *Nicolao Fuſs*. Pag. 104.

Encherchant les courbes dans leſquelles le rayon oſculateur, dans chaque point, eſt égal à la diſtance de ce point à un point fixe quelconque: on trouve que tous les arcs de ces courbes peuvent être exprimés algébriquement. Cependant le cercle qui ſatisfait auſſi à ce Problème n'eſt pas rectifiable. Le bût principal que l'Auteur de ce mémoire avoit eu en vue

en examinant ce Problème, étoit, dit-il, de chercher la ſource de ce Paradoxe apparent. Et il en donne une explication ſatisfaiſante dans ce mémoire; car il y fait voir que l'expreſſion pour l'élement de l'arc qui ſans doute à la général une intégrale algébrique, devient indéfini dans ce cas. M. Fuſs ne ſe borne pas à ce cas particulier: il traite le Problème dans toute l'extenſion dont il eſt ſusceptible, en cherchant les courbes dans lesquelles le rayon oſculateur eſt égal à une fonction quelconque de la diſtance. Il applique cette Solution générale à deux cas principaux, ſavoir I°.) où le rayon oſculateur eſt un multiple n de la diſtance & II°.) où il eſt proportionnel à une puiſſance m de la diſtance.

Dans le premier article il diſtingue trois cas: $n = 1$; $n < 1$; $n > 1$. Le cas $n = 1$ lui fournit une *Spirale* douée, outre la propriété qui fait la condition du Problème, de pluſieurs autres propriétés remarquables; la principale en eſt que ſa ſeconde Développée eſt un cercle; propriété de laquelle l'Auteur déduit un moyen très-ſimple & très-facile de décrire la courbe mecaniquement. Le ſecond cas $n < 1$ fournit une *Lemniſcate* & le troiſième $n > 1$ encore une ſpirale ſemblable à celle du premier cas.

Quant au ſecond cas principal, M. Fuſs s'eſt vu obligé de reſtreindre la ſolution, par l'omiſſion de la conſtante que l'intégration exigéroit; mais cette réſtriction lui offre l'avantage de trouver des courbes algébriques qui ſatisfont au Problème. Parmi les cas particuliers qu'il en déduit celui ou $m = 2$ eſt ſurtout remarquable parce que ſa Solution complette eſt au deſſus des forces de l'Analyſe quoique feu M. Euler l'a deja traité dans un mémoire qui eſt encore en manuſcrit; ou il a fait voir que la courbe dont le rayon oſculateur eſt propor-

tion-

tionnel au quarré de la diſtance eſt compoſée de deux portions, l'une ſemblable à la courbe que notre auteur a trouvé pour $n < 1$ & l'autre ſemblable à ſa Spirale du cas $n > 1$. Le cas $m = 3$ mène à l'Hyperbole rectangle, qui eſt doué, comme l'on ſait, de la propriété que ſon rayon oſculateur eſt dans chaque point proportionnel au cube de ſa diſtance au centre de l'Hyperbole. Et le cas $m = 4$ donne une courbe du troiſième ordre qui eſt auſſi aſſymptotique comme la précédente, & comme toutes les autres courbes du ſecond article Solution.

CLASSE

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

De motu oſcillatorio tabulae ſuſpenſae et a vento agitatae.

Auctore *L. Eulero*, pag. 131.

L'Auteur conſidére une planche ſuſpendue par un axe horizontal, & expoſée à l'impulſion du vent: il commence d'abord par chercher de deux manières différentes la formule générale pour l'expreſſion de cette impulſion, quand la planche s'eſt déja écartée de ſa ſituation naturellement verticale, & qu'elle a reçu une certaine viteſſe. Il traite ſon ſujet d'après deux diverſes hypothèſes; dans la premiere il fait ſelon la méthode uſitée l'impulſion du fluide proportionnelle au quarré du ſinus de l'angle d'incidence; & dans l'autre, conformément aux expériences de M. Marguerie, il prend cette impulſion ſimplement proportionnelle à ce ſinus.

M. Euler donne donc pour la premiere hypothèſe l'équation différentielle, qui renferme le mouvement de la planche, ſuppoſée rectangulaire. Comme cette équation n'eſt pas intégrable en général, il développe le cas, où la viteſſe du vent eſt incomparablement plus grande que celle de la planche. Mais l'équation reſtant encore rebelle, il ſuppoſe de plus le poids de la planche ſi grand, que ſes agitations ou vibrations

en

en deça & en delà de la verticale ne puiſſent être que très petites. Ces vibrations étant iſochrones, l'Auteur indique le tems requis pour chacune, & il fait remarquer, que ce tems dépend ni de la viteſſe du vent, ni du poids de la planche.

L'Auteur montre enſuite, que quand l'angle de déclinaiſon deviendroit aſſés conſiderable, il y auroit cependant un certain angle, ſous lequel la planche ſeroit en équilibre avec le choc du vent, & qu'elle fera dans ce cas encore de petites vibrations iſochrones autour de cet angle, pour lesquelles il donne la formule du pendule ſimple ſynchrone. Ce mouvement vibratoire dépendra principalement de la viteſſe du vent, & deviendra plus rapide, à-meſure que l'angle de déclinaiſon augmentera; & quand cet angle approchera de 90 dégrés, les vibrations ſe feront ſi vite, qu'on entendra du bruit, comme l'expérience auſſi l'atteſte.

La ſeconde hypothèſe préſentant les mêmes difficultés que la prémiére pour l'intégration en général, M. Euler s'arrète encore ſeulement à la conſidération du mouvement vibratoire, pour lequel il donne la formule du pendule ſimple ſynchrone, & fait remarquer, que ces vibrations ſe font moins vite que d'après la premiere hypothèſe.

L'Auteur finit ſon Mémoire par la réfléxion, que puisque le tems des vibrations eſt different pour les deux différentes hypothèſes, on pourra décider facilement & d'une manière très ſure par des expériences, laquelle d'entre elles eſt la véritable; puisqu'on n'a beſoin de connoitre, ni la viteſſe du vent, ni le poids de la planche.

II.

Dilucidationes in Commentarium Ill. Euleri de ictu glandium contra tabulam exploſarum, Tom. XV. Nov. Commentariorum inſertum.

Auctore *Iacobo Bernoulli*, pag. 148.

Ce Mémoire eſt déſtiné à expliquer quelques paradoxes, auxquels M. Euler avoit été conduit par le calcul dans la Diſſertation citée dans le titre. L'Auteur de ce Mémoire examine chacun de ces paradoxes ſéparément, & montre, qu'ils ſont parfaitement d'accord avec les premiers principes de la Mécanique, & avec le ſimple bon-ſens : mais il s'attache ſur toute choſe à chercher *a-priori* le déchet de la force vive, produit dans un de ces cas par le choc. Il trouve, en tenant compte d'une légère faute de calcul dans le Mémoire de M. Euler, que ce déchet eſt le même, que celui, auquel ce ſavant étoit parvenu indirectement, & dont il croyoit impoſſible de rendre raiſon.

III.

Eſſai ſur une nouvelle machine hydraulique propre à élever de l'eau, & qu'on peut nommer Machine Pitotienne.

Par M. *Jacques Bernoulli*, pag. 158.

On peut lire dans le commencement du Mémoire même, ce qui a occaſionné l'idée de cette machine, & le principe, ſur lequel elle eſt batie, qui n'eſt autre que le fameux tube de Pitot, inventé pour meſurer la viteſſe de l'eau d'une riviére. On peut voir dans la Planche IV. le deſſin de

de la machine, qui conſiſte dans un tube entortillé autour d'un cylindre vertical, & dont les deux embouchures ſont horizontales dans des directions oppoſées. La machine doit être tournée avec une grande viteſſe, de manière que l'eau extérieure tranquille exerce une preſſion contre celle qui eſt contenue dans le tube, qui donc ſera obligée de monter, & de s'écouler par en-haut. Les formules de l'Auteur s'étendent proprement à un tube quelconque; mais enſuite il s'arrête particulierement à un tube appliqué autour d'un cylindre, & d'une amplitude partout égale. Pour le cas du *minimum*, c'eſt-à-dire où le rapport de la puiſſance abſolue (la force mouvante multipliée par ſa viteſſe) à l'effet utile (la quantité d'eau élevée à la hauteur requiſe) eſt le plus petit, il trouve que ce rapport eſt de 4 : 1; qu'alors, en appellant g l'eſpace parcouru dans une ſeconde par la chute d'un grave, v la viteſſe avec laquelle l'eau s'écoule, & k la hauteur, à laquelle elle eſt élevée, on a $v = \sqrt{\frac{4}{3} g k}$; pour la viteſſe rotatoire du tube, elle eſt toujours $= v + \sqrt{(4 g k + v v)}$. Au reſte l'Auteur abandonne entiérement aux lecteurs, qui ſont au fait de ces matières, le jugement qu'on doit porter ſur cette machine, relativement à d'autres du même genre.

IV.

Suite du mémoire ſur les liſtes des mariages, des naiſſances & des morts à St. Pétersbourg, contenant la période de 1781 jusqu'en 1785.

Par M. *W. L. Krafft.* Pag. 174.

M. Krafft continue d'analyſer les liſtes des mariages, des naiſſances & des morts, qui lui ſont communiquées annuellement ſuivant la même méthode, dont il s'eſt ſervi dans

ſon premier mémoire inſéré aux Actes de l'Académie pour l'Année 1782. Part. I. Il rédige d'abord ces liſtes ſous différentes formes plus ou moins générales, & en tire enſuite des réſultats qu'il compare avec ceux qui ont été trouvés pour les périodes précédentes. Celle de 1781 à 1785 qui fait l'objet des recherches du préſent mémoire, ſe diſtingue des précédentes par le plus grand nombre annuel des naiſſances & des mariages. Cependant l'excédent des naiſſances ſur les morts dans la période immédiatement précédente a été prèsque le double de celui de la derniere, dont la cauſe doit être cherchée dans les fievres chaudes qui en 1783, 1784 & 1785 ont ſurtout ravagé parmi les hommes.

En comparant enſuite ces réſultats avec ceux qui pour la même période de 1781 à 1785 ont été tirés des liſtes de la ville de Paris, M. Krafft établit avec une grande probabilité que la population de St. Pétersbourg étoit dans cette période à celle de Paris comme 10 à 36, ce qui eſt très bien d'accord avec les dénombremens éffectifs. De ces réſultats généraux notre Académicien paſſe aux remarques ſpéciales, qui toutes ſont très intereſſantes, & pour lesquelles nous croyons devoir renvoyer le lecteur au mémoire même.

CLAS-

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio octava: De fibris mediis ventriculi dextri, pars prior, pag. 211.

II.

Diſſertationis octavae: De fibris mediis ventriculi dextri, pars poſterior, pag. 242.

Auctore *C. F. Wolff.*

C'eſt la couche moyenne des fibres du ventricule droit, qui n'en a que trois, que l'Auteur décrit dans ces deux mémoires, après avoir expoſé la couche externe dans les diſſertations précédentes. Comme les fibres de la couche externe du ventricule droit prennent leur origine des deux troiſiemes parties de la circonférence externe de ce ventricule, ſavoir de ſa baſe & du bord inférieur de la cloiſon, & s'inſérent dans la troiſieme, qui reſte, c'eſt à dire dans le bord ſupérieur de la cloiſon; en ſe concentrant de quelque manière dans leur cours; les fibres moyennes au contraire ne commencent que d'une ſeule de ces trois parties de la circonférence du ventricule, ſavoir du bord inférieur & s'inſérent dans les deux autres, à la baſe & au bord ſupérieur de la cloiſon, en divergeant dans leur marche. C'eſt ainſi, que les fibres des deux couches ſe croiſent mutuellement, qu'elles marchent dans une direction diverſe, & qu'elles contractent dans leur action

le ventricule d'une maniere différente, comme l'Auteur l'a expoſé dans la diſſertation ſuivante.

Lorsque ces fibres ont pris leur origine au bord inférieur de la cloiſon, elles marchent de là, en montant un peu obliquement, vers le bord droit du ventricule, & couvrent toute ſa ſurface inférieure. Alors elles ſurpaſſent ce bord & viennent dans la ſurface ſupérieure, qu'elles occupent de même par leur diſtribution; excepté la partie voiſine de la pointe, qui eſt presque la troiſieme partie de toute la ſurface ſupérieure du ventricule, & qui, comme nous l'avons annoncé déja dans l'extrait de la ſeptieme diſſertation, n'eſt compoſé que des deux couches de fibres, l'externe & l'interne; encore que les anatomiſtes ayent décrit, & même deſſiné, une couche moyenne dans cette région du ventricule.

Mais outre la ſurface, ou parois, ſupérieur & inférieur du ventricule droit, celui-ci a encore un parois poſtérieur, qui comme pluſieurs autres parties du coeur, a été entierement inconnu jusqu'ici, & que l'Auteur a décrit dans la premiere diſſertation ſur l'ordre des fibres du coeur. Ce parois poſtérieur, ou *baſilaire*, comme on peut l'appeller, eſt conténu entre le bord baſilaire, qui termine en arriere la ſurface ſupérieure, & la baſe du ſinus droit. Dans le coeur enveloppé de ſa peau externe & de la graiſſe, conténüe ſous elle, cette graiſſe & la peau couvrent le bord baſilaire & s'étendent en même tems ſur une grande partie du parois antérieur du ſinus droit & de l'aorte, ainſi que le bord, tout le parois baſilaire, & la baſe du ſinus droit étant cachés, on ne peut d'aucune maniere ni diſtinguer les vraies limites entre le coeur & le ſinus droit, ni ſoupçonner, qu'il y ſoit caché en cet endroit une ſinguliere & aſſez grande partie du coeur, ſavoir

voir le parois baſilaire. Cela paroit être la principale raiſon, qu'on n'avoit pas découvert cette partie. Senac a bien découvert le coeur de ſa peau; mais il avoit la coutume de ne préparer que des coeurs cuits & remplis enſuite de cotton, & c'eſt par ces manoeuvres, que d'un coté le coeur, contracté terriblement par la coction, perdoit en général beaucoup de ſa figure naturelle, & que de l'autre coté l'anatomiſte dans le coeur enflé ne pouvoit plus diſtinguer la ſurface baſilaire de la ſuperficie ſupérieure; pour ne rien dire encore de ce, que par la coction la ſurface baſilaire a été diminuée beaucoup, & presque réduite à rien.

C'eſt donc cette partie baſilaire par devant laquelle les fibres, qui prennent leur origine du bord inférieur de la cloiſon paſſent ſans la toucher. Et il y a par conſéquent une claſſe particuliere de fibres, qui s'étendent ſur cette partie & la couvrent. L'Auteur décrit ces fibres, qu'on peut appeller *baſilaires*, dans le premier de ces mémoires, & dans le ſecond memoire toutes les autres de la couche moyenne, qui commencent du bord inférieur de la cloiſon & qui s'étendent ſur la ſurface inferieure & ſupérieure du ventricule.

Les fibres baſilaires naiſſent d'une maniere ſinguliere du premier faiſceau des fibres, qui prennent leur origine du bord inferieur de la cloiſon. Ce faiſceau, paſſant près du bord baſilaire du ventricule, & parallele à lui, lorsqu'il eſt venu de la ſurface inferieure jusqu'à un angle droit du ventricule, forme de ſes fibres plus profondes un autre faiſceau, qui ſe ſépare de lui, paſſe dans la ſurface, ou parois, baſilaire, & monte vers la baſe de l'artère pulmonaire, dans laquelle il s'inſere. Celui-ci à ſon tour produit de la même maniere d'autres faiſceaux, & ceux-ci encore d'autres, ainſi que tous ces faisceaux enfin

enfin s'étendent ſur toute la ſurface baſilaire, & la couvrent. C'eſt de cette façon, que les muſcles baſilaires prennent leur origine les uns des autres, presque comme les nerfs, & qu'ils ſe diſtribuent par toute cette partie, dont ils portent le nom.

Il y a en général vingt divers faiſceaux de fibres, ou muſcles, qui conſtituent toute la couche moyenne. Treize en commencent immédiatement du bord inférieur de la cloiſon, & ſe diſtribuent ſur la ſurface inferieure & ſupérieure du ventricule. Les ſept autres prennent leur origine, comme il l'a été remarqué, du premier des faisceaux ſusdits, & s'étendent ſur toute la ſurface baſilaire. Il faut voir l'origine, la marche & l'inſertion de chacun de ces petits muſcles dans la diſſertation même. Ou bien on peut ſe faire une idée de leur diſtribution, comme en général une idée de l'origine, de la marche & de l'inſertion des fibres de toute la couche, ainſi que de la diverſité de leur direction, de celle des fibres externes & des effets qu'elles produiſent dans l'action du coeur, en conſiderant ſeulement les divers deſſins, que l'Auteur a donnés & qui ſont joints à ſes diſſertations.

II.

Experimenta ad imitationem inventae a Cl. D. Faxe chartae ſic dictae lapideae, vel ardeſiae artificialis.

Auctore *J. G. Georgi*, pag. 266.

L'utilité frappante de l'invention faite à Carlscrona, par M. le D. Faxe, d'un carton incombuſtible & pour ainſi dire pétrifié, a excité M. l'Académicien Géorgi à faire des efforts pour pénetrer dans le ſecret, dont l'auteur ſembloit vouloir couvrir

couvrir cette invention. Pour cette fin il a d'abord analyſé des échantillons de ce carton envoyé de Suede & a trouvé qu'il étoit composé d'environ la moitié de ſon poid d'une terre bolaire martiale, mêlée d'une petite quantité de terre calcaire; d'environ un quart de la matiere végétale groſſiere qui ſert à faire le carton ordinaire; d'une colle de nature animale, & d'une huile qui reſſemble à l'huile de lin, l'une & l'autre environ à la concurrence d'un quart du total. D'après ces données il a faites des expériences en ſe ſervant de bole rouge & blanc, de crayon rouge & de craye ordinaire, tous bien pulveriſés & tamiſés, pour ingrédiens principaux: & en mêlant à différentes proportions ces terres avec de la maſſe de papier, de la colle ordinaire diſſoute & de l'huile de lin, il a produit par une manipulation toute ſimple, des échantillons d'un carton ſemblable, qui n'ont non ſeulement égalé, mais ſurpaſſé même le carton de pierre Suedois par leur nature incombuſtible & impénétrable à l'eau, & par toutes les autres qualités qui rendent cette matiere utile & prope pour le revétiſſement des toits, des maiſons de bois & des navires.

III.

Deſcriptio Characis Leucometopontis.

Auctore *Baſilo Zouiew*, pag. 275.

M. Zouief décrit ici un poiſſon qu'on prendroit d'abord pour une truite, mais dont les dents antérieurs ſurtout demandent qu'on le range parmi les *Characes* de Linné. Or c'eſt à cauſe de ſon front blanc, & pour le diſtinguer du *Charax* tacheté, que notre Auteur lui donne le ſurnom de *Leucometopon.* La deſcription a été faite après un exemplaire de ce poiſſon qui ſe trouve au muſée académique dans la collection de Dahlberg.

 IV.

IV.

Echeneidis nova Species.

Auctore *Baſ. Zouiew*, pag. 279.

M. de Linné ne compte que deux eſpèces dans la Claſſe des poiſſons nommée *Echeneis*: Savoir *Remora* & *Neucrates*. Celle que notre Académicien décrit ici & qui ſe trouve au muſée de l'Académie, approche de la derniere, ſans pouvoir cependant paſſer pour une ſimple variété. M. Zouief en en faiſant par conſéquent une nouvelle eſpèce, lui donne le ſurnom *Neucratoides*. L'un & l'autre poiſſon ſont repréſentés en grandeur naturelle ſur les planches V^e & VIe.

V.

Enodatio quaeſtionis an indoles matricis metalliferae et metalli quod continet, notam praebet certam qua dignoſci poſſunt montes primarii a ſecundariis?

Auctore *J. J. Ferber*, pag. 284.

M. le Conſeiller des mines Ferber traite dans ce mémoire la queſtion, s'il y a des gangues & des métaux ou minéraux affectés aux montagnes primitives & ſecondaires, & ſi l'on peut juger d'après ces minéraux de la nature des montagnes, où de telles ſubſtances ſe trouvent? Il réfute l'opinion qui ſoutient, que les montagnes ſecondaires ne contiennent point de filons, par les mines de plomb du Derbyſhire; & l'autre opinion, qui en prive les hautes montagnes de granit, par les mines

mines de Scharfenberg, de Furſtenberg, d'Allemont en Dauphiné, du Salzbourg, & par quelques minières de la Lapponie & de la Sibérie. Il rapporte pluſieurs exemples de roches & de minéraux, qu'on a cru appartenir excluſivement à l'ordre ſecondaire des montagnes, comme le trap, les bitumes, le gypſe ſéléniteux, l'ardoiſe: qu'il prouve exiſter également dans les montagnes primitives. D'autre part le ſpat péſant & ſa terrre, le nikkel, le cobalt, & pluſieurs autres matieres minérales, que l'on a voulu approprier aux montagnes primitives, ſe trouvent également dans les ſecondaires. Il auroït éte à ſouhaiter, que M. Ferber eut voulu donner plus d'étendue & de detail à ce mémoire interéſſant.

CLASSE D'ASTRONOMIE.

De Eclipſi Solis, anno 1787 die $\frac{4}{15}$ Junii, obſervata.

Auctore *Stephano Roumovski*, pag. 293.

L'utilité principale que les Aſtronomes tâchent de tirer des obſervations des éclipſes ſolaires, eſt de trouver par leurs moyens l'erreur des tables de la Lune, & de déterminer enſuite de plus en plus exactement, la longitude reſpective des endroits, où ces obſervations ont été faites. C'eſt ſous ce point de vüe que l'Auteur de ce mémoire, après avoir expoſé les obſervations mêmes qu'il a faites à l'obſervatoire de l'Académie, du commencement & de la fin de l'eclipſe, ainſi que des parties éclairées du Soleil pendant ſa durée, en recherche d'abord pour le méridien de St. Pétersbourg le moment de la conjonction de la Lune & du Soleil, avec la latitude de la Lune pour ce même moment. En employant dans cette détermination les obſervations des parties éclairées faites avant & après le milieu de l'eclipſe, M. Roumovski conclud que l'erreur des tables lunaires dans la latitude n'eſt pour le moment de la conjonction que de 4″ ſouſtractive, & que ce moment même doit être éſtimé fort à peu près à 5 h. 50′. 16″ temps de St. Pétersbourg.

Mais en calculant ce moment de la conjonction par l'obſervation du commencement de l'eclipſe, il le trouve à 5 h. 50′. 17″ & en employent celle de la fin de l'eclipſe à 5 h. 50′. 11″. Ainſi en prennant un milieu entre ces deux derni-

derniers réſultats il fixe le temps de la conjonction à 5 h. 50′. 14″, qui ne differe que de 2 ſecondes de celui qui a été déduit des obſervations des parties éclairées faites pendant l'eclipſe. Il faut convenir qu'un tel accord eſt plus que ſuffiſant à ne laiſſer aucun doute que les déterminations trouvées doivent approcher de très près de la vérité.

Il ſuit donc de cette obſervation de l'Eclipſe ſolaire faite en 1787, que le vrai temps aſtronomique de la conjonction du Soleil & de la Lune a été pour le méridien de St. Petersbourg le $\frac{4}{15}$ Juin à 5 h. 50′. 14″, la longitude de la Lune étant 2^s. 24^d. 20′. 25″, 3 & ſa latitude 7′. 21″ boréale.

La correction des tables en longitude ſeroit par conſéquent de 16″ additive, en ſuppoſant tout à fait exacte la longitude du Soleil tirée des tables.

Quant à la différence des méridiens des endroits, où cette eclipſe a été obſervée, il ſuffit de rapporter ici que M. Roumovski trouve la longitude de Prague de 48′. 28″ depuis le méridien de Paris: de ſorte que les Connoiſſances des temps la font de 30″ trop grande, en la ſuppoſant de 48′. 58″. Mais ceci s'accorde encore très bien avec ce que notre Académicien avoit déja prouvé par ſes calculs du moment de la conjonction du Mercure avec le Soleil inſérés au Tome IIe de ces nouveaux Actes.

MÉTÉOROLOGIE.

Eté de 1786, tiré de l'Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année 1786 ſuivant le nouveau ſtile. Pag. 306.

La Néva débacla le 21 Avril & fut repriſe après 199 jours, le 6 Novembre.

Il géla pour la derniere fois le 11 Mai, & il recommença à géler le 25 Septembre: l'intervalle entre ces deux époques eſt de 137 jours.

Il neigea pour la derniere fois le 2 Mai, & il recommença à neiger le 5 Octobre, après un intervalle de 156 jours.

La plus grande chaleur après la graduation de Délisle a été obſervée le 27 Juin à 2 heures après midi, de 107 dégrés, qui répondent à une chaleur de 22 degrés de Réaumur.

La moyenne chaleur déduite de celles qui ont été obſervées à 2 heures après midi, a été depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre, 126°, 4, & depuis le 1er Juin jusqu'au 1er Octobre, 121°, 4.

La moyenne chaleur tirée des obſervations faites aux heures du matin & du ſoir, depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre 137°, 7, & depuis le 1er Juin jusqu'au 1er Octobre 133°, 8.

En-

Enſuite depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre, ce qui fait un intervalle de 184 jours d'été, la chaleur à 2 heures après midi s'eſt trouvée, en 6 jours plus forte que 110; en 55 jours elle a été entre 120 & 110, en 60 jours entre 130 & 120, en 39 jours entre 140 & 130, & en 24 jours moindre que 140 degrés.

Mais la chaleur aux heures du matin & du ſoir a été pendant ce même intervalle d'été, en 27 jours moindre que 150, c'eſt à dire qu'il a gélé en 27 jours: elle a été en 38 jours entre 140 & 150, en 79 jours entre 130 & 140, & en 40 jours moindre que 130 degrés.

Le Baromètre a été au plus haut, le 24 & le 30 Octobre à 3 heures du matin, de 28. 59 pouces de Paris: il a été au plus bas le 14 Septembre à 10 heures avant midi de 27. 46. Donc la variation = 1. 13 & le milieu = 28. 025. Or la hauteur moyenne = 28. 096 ou $28\frac{96}{1000}$ pouces. Enfin la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé

27. 90	pouces en	151	jours	18	heures
28. 00	pouces en	129	——	18	——
28. 10	pouces en	95	——	18	——

Les Vents forts ont ſoufflé en 3 jours du Nord, en 12 jours du NE., en 6 jours de l'Eſt, en 5 jours du SE., en 6 jours du Sud, en 5 jours du SOu., en 13 jours de l'Oueſt & en 9 jours du NOu. Parmi ces vents ſe ſont trouvés être les plus violens, ceux du 11 & 20 Juin *Nord*, du 25 Mai & du 24. 25 Octobre *Oueſt*, enfin ceux du 29 Mai & du 26 Octobre *NOu.* Au reſte les ſix mois d'été ſe ſuivent par rapport à la force des vents dans cet ordre :

Mai

Mai	:	Octobre	:	Juin	:	Septembre	:	Août	:	Juillet
274	:	271	:	257	:	253	:	251	:	197

de ſorte que le mois de Mai a été le plus venteux & le mois de Juillet le plus calme. Enfin le rapport des quatre plages ſe trouve pour ces ſix mois d'été:

Nord	:	Eſt	:	Sud	:	Oueſt
40	:	63	:	39	:	42

Le vent dominant a par conſéquent été celui de l'Eſt.

Il y a eu 49 jours de ciel entiérement clair & 36 jours de ciel entiérement couvert: enſuite 22 jours de brouillard.

29 jours de pluie forte, 61 jours de pluie médiocre, en tout 90 jours de pluie. Enſuite 11 jours où il a neigé & 2 jours où il eſt tombé de la grêle.

7 Orages complets: en 8 jours il n'a fait que tonner de loin, & en 3 fois il a fait des éclairs de nuit.

12 Aurores boréales, dont 7 ont été fort ſplendides.

Hyver de 1786 à 1787 tiré du même Extrait & en partie des obſervations faites dans les quatre premiers mois de l'année 1787.

La Néva ayant été priſe le 6 Novembre, elle demeura dans cet état de congélation pendant 169 jours, jusqu'au 24 Avril

Avril 1787, par une temperature de 142 degrés de Délisle. Baromètre 28. 58 pouces, vent fort de SSOu. Pluie & neige.

L'intervalle entre la premiere gélée du 25 Septembre & la derniere du 27 Avril 1787 eſt de 214 jours. Celui entre la premiere neige du 5 Octobre & la derniere du 15 Mai 1787, eſt de 222 jours.

Le plus grand froid, 197° après la diviſion de Délisle ou 15 degrès après celle de Réaumur a été obſervée le 9 Fevrier matin 1787. Baromètre 28. 28. Calme & ciel ſerein.

Le froid moyen entre toutes les obſervations faites aux heures du matin & du ſoir, ſe trouve être pour l'intervalle des ſix mois d'hyver depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai 1787, de 164°, 3, & pour l'intervalle des quatre mois depuis le 1er Décembre jusqu'au 1er Avril 1787 de 165°, 7.

Le froid moyen entre ceux qui ont été annotés à 2 heures après midi, a été déduit pour les même intervalles, du 1er Novembre jusqu'au 1er Mai, de 154°, 7 & du 1er Décembre jusqu'au 1er Avril, de 157°, 1.

Enſuite, depuis le 1er Novembre 1786, jusqu'au 1er Mai 1787, ce qui fait un intervalle de ſix mois ou de 181 jours d'hyver, le froid obſervé aux heures du matin & du ſoir a été en 2 jours plus grand que 190, en 13 jours entre 180 & 190, en 42 jours entre 170 & 180, en 54 jours entre 160 & 170, en 59 jours entre 150 & 160 & en 11 jours moindre que 150, qui eſt le point de congélation: de ſorte qu'il n'a gélé point du tout en 11 jours.

Et le froid des après-midi obſervé à 2 heures, a été en 3 jours moindre que 130, en 11 jours entre 140 & 130, en 49 jours entre 150 & 140; ce qui font 63 jours où il a dégélé aux heures de l'après midi. Enſuite en 60 jours le froid a été entre 160 & 150, en 39 jours entre 170 & 160, & en 19 jours au deſſous de 170 degrés. Ce qui donne 118 jours de gélée continuelle.

La plus grande hauteur du Baromètre pendant ces ſix mois d'hyver a été de 29, 06 pouces, le 10 de Mars à 10 heures avant midi. Thermomètre 162: ciel ſerein, vent très fort du SE.

La plus petite hauteur du Baromètre, 27. 22, le 3 du même mois de Mars 1787, à 6 heures du ſoir. Thermomètre 147. Ciel couvert, neige & pluïe, vent fort du SOu.

La variation totale = 1. 84 & le milieu = 28. 140.

La hauteur moyenne = 28. 169 ou = $28\frac{169}{1000}$ pouces de Paris. Enfin la hauteur du Baromètre a été en 137 jours 15 heures plus grande que 27. 90, en 121 jours 21 heures plus grande que 28. 00 & en 106 jours plus grande que 28. 10.

Les Vents forts ont ſoufflé du Nord en 1 jour, du NE en 3 jours, de l'Eſt en 6 jours, du SE en 13 jours, du Sud en 9 jours, du SOu en 15 jours, de l'Oueſt en 14 jours & du NOu en 18 jours. Parmi ces vents forts ont été les plus violens ceux du 21 Avril *NE*, du 15 Novembre, 28. Avril 14. & 15 Mai *SOu*, du 11 & 14 Novembre *Oueſt*, & ceux du 6 Janvier & 4 Mars *NOu*. Les ſix mois d'hyver ſe ſuivent par rapport à la force des vents dans cet ordre:

Mars

Mars	Avril	Novembre	Décembre	Janvier	Février
351	310	283	281	271	235

de ſorte que le mois de Mars 1787 a été le plus venteux & le mois de Février le plus calme. Le rapport des quatre plages pour nos ſix mois d'hyver

Nord	Eſt	Sud	Oueſt
52	38	39	52

Les vents dominans ont donc été ceux du Nord & de l'Oueſt.

Il y a eu 53 jours de ciel entiérement clair, 73 jours de ciel entiérement couvert, & eu 16 jours des brouillards.

Il a neigé copieuſement en 10 jours & médiocrement en 57 jours : il a plu en 15 jours.

Enfin 13 Aurores boréales, dont 7 étoient très fortes.

Faute à corriger.

Pag. 325. à l'article *Atmoſphère*: il faut changer les titres des deux premieres colomnes en liſant *hyver* au lieu d'été & *été* au lieu d'hyver.

MATHE-

MATHEMATICA.

EVOLVTIO FORMVLAE INTEGRALIS $\int \partial x \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx}\right)$ A TERMINO $x = 0$ VSQVE AD $x = 1$ EXTENSAE.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 29 Febr. 1776.

§. 1.

Iſta formula integralis eo magis eſt notatu digna, quod eius valorem oſtendi conuenire cum eo, quem praebet iſta expreſſio: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - ln$, ſi numerus n ſumatur infinite magnus, et quem per approximationem olim inveni eſſe $= 0,5772156649015325$, cuius valorem nullo adhuc modo ad menſuras tranſcendentes iam cognitas redigere potui; vnde haud inutile erit reſolutionem huius formulae propoſitae pluribus modis tentare. Ac primo quidem, quoniam duabus conſtat partibus $\int \frac{\partial x}{1-x}$ et $\int \frac{\partial x}{lx}$, manifeſtum eſt prioris partis valorem $-l(1-x)$, poſito $x = 1$, fore $-l0$ ideoque $= \infty$; tum vero etiam facile perſpicitur, poſterioris partis valorem quoque eſſe infinitum, ſed ſigno contrario affectum, ita vt haud difficulter intelligatur aggregatum earum partium finitum habere valorem.

 Euo-

Euolutio prima geometrica.

§. 2. Primo igitur hanc formulam per quadraturas exhibeamus, conſiderando lineam curuam, cuius abſciſſae x reſpondeat applicata $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx}$, tum vero eius area $\int y \partial x$ abſciſſae x inſiſtens ipſum valorem quaeſitum repraeſentabit, quamobrem formam huius curuae accuratius perpendamus. Ac primo quidem euidens eſt, hanc curuam neutiquam in regionem abſciſſarum negatiuarum porrigi, ſed a termino $x = 0$ incipere. Poſito autem $x = 0$ manifeſto fit $y = 1$, ob $lx = \infty$; at exiſtente x infinite paruo fiet $y = 1 + x + \frac{1}{lx}$, vbi facile perſpicitur poſtremum membrum $\frac{1}{lx}$ eſſe negatiuum et quaſi infinities maius quam x, ita vt fiat $y = 1 - ix$, exiſtente i numero maximo; vnde patet, ſi curuam ad axem A O referamus in eoque abſciſſas x a puncto A capiamus, in ipſo puncto A applicatam fore A C $= 1$, et curuam in C hanc applicatam A C tangere, propterea quod decrementum applicatae infinities ſuperat incrementum abſciſſae. Curua igitur originem ducet ab ipſo puncto C, hincque continuo propius ad axem inflectetur, quem tandem in diſtantia infinita attinget. Poſito enim $x = \infty$ fit $y = -\frac{1}{\infty} + l\frac{1}{\infty}$; vbi notetur prius membrum $\frac{1}{\infty}$ prae altero euaneſcere, ita vt iſte valor ſit poſitiuus, vnde patet, hanc curuum a puncto C ad axem continuo propius eſſe acceſſuram.

Tab. I. Fig. 1.

§. 3. Conſideremus nunc abſciſſam A B $= 1$, vbi ſumto $x = 1$ fit $y = \frac{1}{0} + \frac{1}{0}$, vnde nihil plane concludere liceret, hanc ob cauſſam ſtatuamus $x = 1 - \omega$, vt fiat $y = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{l(1-\omega)}$. Iam $l(1-\omega)$ in ſeriem euoluendo fiet

$$y = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 + \text{etc.}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\omega}{1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2}.$$

Fiat

Fiat nunc $\omega = 0$, ac manifeſtum eſt applicatam in puncto B fore $BD = \frac{1}{2}$, cum eſſet $AC = 1$ et $AB = 1$. Hinc ſimul patet, ſumto ω minimo, ſcilicet $Bb = \omega$, fore applicatam in hoc puncto

$$bd = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\omega}{1 + \frac{1}{2}\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\omega,$$

ſicque elementum curuae Dd ad axem inclinatur ſub angulo cuius tangens eſt $\frac{1}{12}$, qui eſt propemodum $4^\circ.\ 46'$.

§. 4. Sumamus nunc abſciſſam $AE = \frac{1}{2}$, eique reſpondebit applicata $EF = 2 - \frac{1}{l2} = 0,557$ propemodum, atque hinc iam proxime area $ABCD$ colligere licet. Namque ſi CF eſſet linea recta, foret area $ACFE = 0,389$; quia autem verſus axem incuruatur, haec area erit aliquanto minor. Pro altera parte, quia FD minus incuruatur erit area $BDFE$ aliquantillum minor quam $\frac{1}{2}BE(BD + EF) = 0,264$ propemodum, vnde tota area $ACDB$ certe minor erit quam $0,653$, id quod iam ſatis conuenit cum veritate, quandoquidem haec area eſſe debet $0,577$. At ſi abſciſſam $AB = 1$ in plures partes diuidere et areas ſingulis partibus reſpondentes indagare vellemus, earum ſumma eo propius ad valorem cognitum acceſſura foret, quo plures partes fuerint conſtitutae. Quia autem de vero valore huius formulae iam certi ſumus, talis labor fruſtra ſuſciperetur, ſed hic ſufficiat formam huius curuae prorſus ſingularis, quippe quae in puncto C ſubito incipit, expendiſſe.

Euolutio ſecunda.

§. 5. Euoluamus nunc lx in ſeriem, et quia eſt $x = 1 - (1 - x)$ erit

$$lx = -(1-x) - \tfrac{1}{2}(1-x)^2 - \tfrac{1}{3}(1-x)^3 - \tfrac{1}{4}(1-x)^4 - \text{etc.}$$

et quia eſt $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx} = \frac{lx + 1 - x}{(1-x)lx}$, iſtam ſeriem tantum in

numeratore loco $l\,x$ ſcribamus, prodibitque

$$y = \frac{-\frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{4}(1-x)^4 - \text{etc.}}{(1-x)\,l\,x}$$

atque hinc

$$y = \frac{-\frac{1}{2}(1-x) - \frac{1}{3}(1-x)^2 - \frac{1}{4}(1-x)^3 - \text{etc.}}{l\,x},$$

hinc igitur per partes integrando valor quaeſitus erit

$$\int y\,\partial x = -\tfrac{1}{2}\int\frac{(1-x)\,\partial x}{l\,x} - \tfrac{1}{3}\int\frac{(1-x)^2\,\partial x}{l\,x} - \tfrac{1}{4}\int\frac{(1-x)^3\,\partial x}{l\,x} - \text{etc.}$$

quae formulae ſingulae facile ad formulam illam generalem reducuntur, qua oſtendi eſſe

$$\int\frac{x^m - x^n}{l\,x}\,\partial x = l\,\frac{m+1}{n+1}. \; (*)$$

Hinc enim ſtatim erit $\int\frac{(1-x)\partial x}{l x} = l\,\frac{1}{2}$, et quia eſt

$$(1-x)^2 = 1 - x - (x - x\,x), \text{ erit}$$

$$\int\frac{(1-x)^2\,\partial x}{l\,x} = l\,\tfrac{1}{2} - l\,\tfrac{2}{3} = l\,\frac{1.3}{2^2}.$$

Simili modo facile patebit fore

$$\int\frac{(1-x)^3\,\partial x}{l\,x} = l\,\frac{1.3^3}{2^3.4};$$

$$\int\frac{(1-x)^4\,\partial x}{l\,x} = l\,\frac{1.3^6.5}{2^4.4^4};$$

$$\int\frac{(1-x)^5\,\partial x}{l\,x} = l\,\frac{1.3^{10}.5^5}{2^5.4^{10}.6};$$

$$\int\frac{(1-x)^6\,\partial x}{l\,x} = l\,\frac{1.3^{15}.5^{15}.7}{2^6.4^{20}.6^6}; \text{ etc.}$$

§. 6. Ex his igitur valor noſtrae formulae $\int y\,\partial x$ per ſeriem logarithmicam prorſus ſingularem ſequenti modo exprimetur:

$$\int y\,\partial x = \tfrac{1}{2}\,l\,2 + \tfrac{1}{3}\,l\,\frac{2^2}{1.3} + \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{2^3.4}{1.3^3} + \tfrac{1}{5}\,l\,\frac{2^4.4^4}{1.3^6.5}$$
$$+ \tfrac{1}{6}\,l\,\frac{2^5.4^{10}.6}{1.3^{10}.5^5} + \tfrac{1}{7}\,l\,\frac{2^6.4^{20}.6^6}{1.3^{15}.5^{15}.7} + \text{etc.}$$

Vbi

(*) Hoc integrale duplici modo ab Ill. huius diſſertationis Auctore fuit inventum in Tomo XIX. Nouorum Commentariorum pag. 70 et 79. F.

Vbi probe notandum eſt omnes logarithmos capi debere hyperbolicos; facile autem intelligitur, terminos huius ſeriei continuo prodire minores, neque tamen hanc ſeriem tantopere conuergere, vt ex ea valor quaeſitus commode computari poſſit.

Euolutio tertia.

§. 7. Vtamur eadem reſolutione logarithmi x in ſeriem infinitam, ac ponamus breuitatis gratia $1 - x = t$, vt ſit

$$lx = -t - \tfrac{1}{2}tt - \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{4}t^4 - \text{etc.}$$ eritque

$$\frac{1}{lx} = \frac{-1}{t(1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}tt + \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{5}t^4 + \text{etc.})}.$$

Iam fractionem $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}tt + \text{etc.}}$ conuertamus more ſolito in ſeriem recurrentem, quae ſit

$$1 + \alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \delta t^4 + \varepsilon t^5 + \zeta t^6 + \text{etc.}$$

vbi coëfficientes α, β, γ, δ, etc. ita erunt comparati, vt ſit

$\alpha + \frac{1}{2} = 0$,	hincque	$\alpha = -\frac{1}{2}$,
$\beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3} = 0$,		$\beta = -\frac{1}{12}$,
$\gamma + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{4} = 0$,		$\gamma = -\frac{1}{24}$,
$\delta + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{5} = 0$,		$\delta = -\frac{19}{720}$,
etc.		etc.

vnde hanc ſeriem tanquam cognitam ſpectare licet.

§. 8. Hoc igitur valore ſubſtituto erit

$$\frac{1}{lx} = -\frac{1}{t} - \alpha - \beta t - \gamma tt - \delta t^3 - \varepsilon t^4 + \text{etc.},$$

quare cum ſit $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{t}$, erit

$$y = -\alpha - \beta t - \gamma tt - \delta t^3 - \varepsilon t^4 - \text{etc. ſiue}$$

$$y = -\alpha - \beta(1-x) - \gamma(1-x)^2 - \delta(1-x)^3 - \text{etc.}$$

Cum

Cum nunc in genere ſit

$$\int \partial x\,(1-x)^n = C - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-x)^n}{n+1},$$

poſito $x = 1$, quemadmodum aſſumſimus, erit

$$\int \partial x\,(1-x)^n = \tfrac{1}{n+1}.$$

Hinc igitur ſingulis integralibus collectis reperietur

$$\int y\,\partial x = -\tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\beta}{3} - \tfrac{\gamma}{4} - \tfrac{\delta}{5} - \tfrac{\varepsilon}{6} - \text{etc.},$$

vnde per valores ante euolutos fiet

$$\int y\,\partial x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{96} + \tfrac{17}{3600} + \text{etc.}$$

quae ſeries vtique parum eſt conuergens.

Euolutio quarta.

§. 9. Cum habeamus $y = \frac{lx + 1 - x}{(1-x)\,lx}$, quemadmodum ante partem lx in ſeriem infinitam reſoluimus, ita nunc viciſſim ipſam quantitatem in ſeriem per logarithmos ipſius x procedentem euoluamus. Quia enim eſt $x = e^{lx}$, erit

$$x = 1 + lx + \tfrac{1}{2}(lx)^2 + \tfrac{1}{6}(lx)^3 + \tfrac{1}{24}(lx)^4 + \text{etc.}$$

vbi loco lx breuitatis ergo ſcribamus u, atque hanc ſeriem tantum in numeratorem introducamus, vt fiat

$$y = \frac{-\tfrac{1}{2}uu - \tfrac{1}{6}u^3 - \tfrac{1}{24}u^4 - \tfrac{1}{120}u^5}{u(1-x)} - \text{etc., ſiue}$$

$$y = \frac{-\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{6}uu - \tfrac{1}{24}u^3 - \tfrac{1}{120}u^4}{1-x} - \text{etc.},$$

ideoque

$$\int y\,\partial x = -\tfrac{1}{2}\int\frac{\partial x\,lx}{1-x} - \tfrac{1}{6}\int\frac{\partial x\,(lx)^2}{1-x} - \tfrac{1}{24}\int\frac{\partial x\,(lx)^3}{1-x}$$
$$- \tfrac{1}{120}\int\frac{\partial x\,(lx)^4}{1-x} - \text{etc.}$$

§. 10.

§. 10. Cum nunc in genere, ſumto ſcilicet integrali ab $x = 0$ ad $x = 1$, ſit $\int \partial x (l x)^n = \pm 1.2.3.4.5.\ldots n$, vbi ſignum + valet quando n eſt numerus par, contra vero ſignum —, erit porro

$$\int x^{n-1} \partial x (l x)^\lambda = \pm \frac{1.2.3.4.5.\ldots\ldots\lambda}{n^{\lambda+1}},$$

vbi ſignum + valet ſi λ fuerit numerus par, inferius vero ſi impar. Hinc igitur ſingulas noſtras formulas per ſeries integremus, dum loco $\frac{1}{1-x}$ ſeriem ſcribimus

$$1 + x + xx + x^3 + x^4 + x^5 + \text{etc.}$$

atque hinc primo nanciſcemur

$$\int \frac{\partial x\, l x}{1-x} = -1 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc.}\right)$$

$$\int \frac{\partial x (l x)^2}{1-x} = 1.2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\int \frac{\partial x (l x)^3}{1-x} = -1.2.3 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{etc.}\right)$$

$$\int \frac{\partial x (l x)^4}{1-x} = 1.2.3.4 \left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{6^5} + \text{etc.}\right)$$

etc. etc.

His igitur ſeriebus ſubſtitutis reperiemus

$$\int y\, \partial x = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right)$$

$$- \tfrac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right)$$

$$- \tfrac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.}\right)$$

cuius expreſſionis iam nuper oſtendi valorem eſſe numerum illum memorabilem 0, 5772156649015325. (*)

Euo-

(*) V. Diſſertatio: *De numero memorabili in ſummatione progreſſionis harmonicae naturalis occurrente.* Acta Acad. pro Anno 1781. Pars poſterior, pag. 49. ſeqq.

F.

Euolutio quinta.

§. 11. Vtamur hic eadem reſolutione in ſeriem ipſius numeri x, ſed eam alio modo adhibeamus. Scilicet cum poſito $l\,x = u$ ſit

$$x = 1 + u + \tfrac{1}{2}uu + \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{1}{24}u^4 + \tfrac{1}{120}u^5 + \text{etc.}$$

erit formulae noſtrae ipſa pars prior

$$\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{u + \frac{1}{2}uu + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{120}u^5\ \text{etc.}} =$$

$$-\frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}u + uu + \frac{1}{24}u^3 + \text{etc.}}.$$

Hanc fractionem:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}uu + \frac{1}{24}u^3 + \text{etc.}}$$

more ſolito in ſeriem recurrentem conuertamus, quae ſit

$$1 - Au + Buu - Cu^3 + Du^4 - Eu^5 + \text{etc.}$$

eritque facta comparatione:

$$\begin{array}{ll}
A = \frac{1}{2} & \text{ergo}\quad A = \frac{1}{2} \\
B = \frac{1}{2}A - \frac{1}{6} & B = \frac{1}{12} \\
C = \frac{1}{2}B - \frac{1}{6}A + \frac{1}{24} & C = 0 \\
D = \frac{1}{2}C - \frac{1}{6}B + \frac{1}{24}A - \frac{1}{120} & D = -\frac{1}{720} \\
E = \frac{1}{2}D - \frac{1}{6}C + \frac{1}{24}B - \frac{1}{120}A + \frac{1}{720} & E = 0.
\end{array}$$

§. 12. Hac igitur ſerie introducta et loco u reſtituto valore $l\,x$, formula noſtra $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{l\,x} = y$ ſequentem induet formam:

$$y = -\tfrac{1}{u} + A - Bu + Cuu - Du^3 + \text{etc.} + \tfrac{1}{u},\ \text{ſiue}$$

$$y = A - B\,l\,x + C\,(l\,x)^2 - D\,(l\,x)^3 + E\,(l\,x)^4 - \text{etc.}$$

vnde cum in genere ſit

$\int \partial x$

$$\int \partial x (l x)^n = \pm 1 . 2 . 3 . 4 . . . . n,$$

poſtquam ſcilicet abſoluta integratione poſitum fuerit $x = 1$, vbi ſignum ſuperius valet, quando n eſt numerus par, inferius vero ſi n impar: hoc obſeruato nanciſcimur valorem quaeſitum $\int v \partial x$ ſequenti modo expreſſum:

$$\int v \partial x = A + 1 B + 1 . 2 C + 1 . 2 . 3 D + 1 . 2 . 3 . 4 E + 1 . . . . 5 F + \text{etc.}$$

quae ſeries vtique parum conuergit, ob coëfficientes litterarum A, B, C, D; verum perpendendum eſt, ipſos valores harum litterarum continuo magis decreſcere, quandoquidem certum eſt, ſeriei valorem eſſe debere 0,5772156649015325, quare operae pretium erit harum litterarum ſeriem accuratius euoluere.

TRANSFORMATIO FRACTIONIS

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2} u + u u + \frac{1}{24} u^3 + u^4 + \text{etc.}}$$

IN SERIEM

$$1 - A u + B u u - C u^3 + D u^4 - E u^5 + \text{etc.}$$

§. 13. Deſignet littera s ſummam huius ſeriei, eritque $s = \frac{u}{e^u - 1}$, vnde ſit $e^u = \frac{u + s}{s}$, hincque $u = l(u+s) - l s$, ergo differentiando erit

$$\partial u = \frac{\partial u + \partial s}{u + s} - \frac{\partial s}{s} = \frac{s \partial u - u \partial s}{s (u + s)},$$

ſiue ſtatim ponatur $s = p u$, vt ſit $u = l \frac{1 + p}{p}$, vnde ſit $\partial u = - \frac{\partial p}{p (p + 1)}$, quae expreſſio quo ſeriem praebeat concinniorem, ſtatuamus $p = q - \frac{1}{2}$, vt iam ſit $s = (q - \frac{1}{2}) u$, tum vero erit $\partial u = - \frac{\partial q}{q q - \frac{1}{4}}$, vnde colligitur haec aequatio:

$$q q - \frac{1}{4} + \frac{\partial q}{\partial u} = 0.$$

 §. 14.

§. 14. Ex hac igitur aequatione inueſtigari debet ſeries valorem ipſius q exhibens, vbi ante omnia principium huius ſeriei inde conſtitui oportet, quod poſito $u = 0$ fieri debeat $s = 1$ et $q = \frac{1}{u} + \frac{1}{2}$; vnde patet ſeriei pro q fingendae primum terminum eſſe debere $\frac{1}{u}$; tum vero facile perſpicitur in hac ſerie poteſtates ipſius u tantum impares aſſumi debere. Quamobrem fingatur iſta ſeries:

$$q = \frac{1}{u} + au + bu^3 + cu^5 + du^7 + eu^9 + \text{etc. eritque}$$

$$\begin{aligned} qq = \frac{1}{uu} + 2a &+ 2bu^2 + 2cu^4 + 2du^6 + 2eu^8 + 2fu^{10} + \text{etc.} \\ &+ aa \quad + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad + bb \quad + 2bc + 2bd + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + cc \end{aligned}$$

$$\frac{\partial q}{\partial u} = -\frac{1}{uu} + a + 3b + 5c + 7d + 9e + 11f + \text{etc.}$$

harum ergo ſerierum ſumma debet eſſe $\frac{1}{4}$, vnde deducuntur ſequentes determinationes:

$3a = \frac{1}{4}$	ergo $a = \frac{1}{12}$
$5b + aa = 0$	$b = -\frac{aa}{5}$
$7c + 2ab = 0$	$c = -\frac{2ab}{7}$
$9d + 2ac + bb = 0$	$d = -\frac{2ac - bb}{9}$
$11e + 2ad + 2bc = 0$	$e = -\frac{2ad - 2bc}{11}$
$13f + 2ae + 2bd + cc = 0$	$f = -\frac{2ae - 2bd - cc}{13}$
etc.	etc.

ex quibus formulis valores numerici litterarum a, b, c, d, computari poterunt.

§. 15. His autem litteris a, b, c, d, etc. definitis ipſa ſeries pro s quaeſita erit

$s = 1$

$$s = 1 - \tfrac{1}{2}u + auu + bu^4 + cu^6 + du^8 + eu^{10} + fu^{12} + gu^{14} + \text{etc.}$$

quare cum ſupra poſuerimus

$$s = 1 - Au + Buu - Cu^3 + Du^4 - Eu^5 + Fu^6 - Gu^7 + Hu^8 - \text{etc.}$$

valores harum litterarum maiuſcularum per minuſculas ſequenti modo definientur:

$$A = \tfrac{1}{2},\ B = a,\ C = 0,\ D = b,\ E = 0,\ F = c,\ G = 0,\ H = d,\ \text{etc.}$$

ſicque poteſtatum imparium coëfficientes per ſe euaneſcunt. Euidens autem eſt ope formularum hic inuentarum valores litterarum a, b, c, d, etc. multo facilius et promptius aſſignari poſſe quam per relationes ſupra allatas, ſcilicet erit $A = \frac{1}{2}$, $B = a = \frac{1}{12}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{720}$, $E = 0$, $F = \frac{1}{30240}$, etc.

§. 16. Quoniam hoc modo calculus iſtarum litterarum mox ad numeros vehementer magnos deduceret, loco litterarum a, b, c, d, etc. quaeramus alias $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. quarum ſigna iam alternentur et quarum valores ad illos ſequenti modo referantur:

$$a = \frac{\mathfrak{A}}{12},\quad b = -\frac{\mathfrak{B}}{12^2},\quad c = +\frac{\mathfrak{C}}{12^3},\quad d = -\frac{\mathfrak{D}}{12^4},\quad e = +\frac{\mathfrak{E}}{12^5},\ \text{etc.}$$

ita vt iam ſit noſtra ſeries

$$s = 1 - \tfrac{1}{2}u + \frac{\mathfrak{A}uu}{12} - \frac{\mathfrak{B}u^4}{12^2} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{12^3} - \frac{\mathfrak{D}u^8}{12^4} + \text{etc.}$$

atque iſtae nouae litterae $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ſequenti modo determinabuntur:

$$\mathfrak{A} = 1 \qquad \mathfrak{D} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{B}}{9},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{5} \qquad \mathfrak{E} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{11},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{7} \qquad \mathfrak{F} = \frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}}{13},\ \text{etc.}$$

qui valores nunc haud difficulter in numeris euoluentur ac reperientur:

$$\mathfrak{A} = 1,\ \mathfrak{B} = \tfrac{1}{5},\ \mathfrak{C} = \tfrac{2}{35},\ \mathfrak{D} = \tfrac{3}{175},\ \mathfrak{E} = \tfrac{2}{385},\ \mathfrak{F} = \tfrac{1382}{875875},\ \text{etc.}$$

§. 17. Introducamus igitur iſtas nouas litteras 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, etc. in ſeriem §. 12. pro $\int y \partial x$ inuentam eritque

$$\int y \partial x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1.\mathfrak{A}}{12} - \tfrac{1.2.3\mathfrak{B}}{12^2} + \tfrac{1.2.3.4.5\mathfrak{C}}{12^3} - \tfrac{1 \ldots 7\mathfrak{D}}{12^4} + \text{etc.}$$

hanc autem ſeriem non ſatis conuergere iam ſupra obſeruauimus.

TRANSFORMATIO FRACTIONIS

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}tt + \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{5}t^4 + \text{etc}}$$

IN SERIEM

$$1 + \alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \delta t^4 + \varepsilon t^5 + \zeta t^6 + \text{etc.}$$

§. 17. Ad hanc transformationem perducti ſumus ſupra in §. 7. vbi euolutio litterarum α, β, γ, δ, etc. mox fiebat nimis moleſta. Nunc igitur ſimili modo vtamur quo ante, poſitaque hac ſerie quam quaerimus $= s$, erit $s = \frac{-t}{l(1-t)}$, ideoque $l(1-t) = -\frac{t}{s}$, ergo differentiando $-\frac{\partial t}{1-t} = \frac{\partial v}{vv}$, ſeu $\frac{\partial v}{vv} + \frac{\partial t}{1-t} = 0$, cui hanc formam tribuamus:

$$vv + \frac{\partial v}{\partial t}(1-t) = 0,$$

ex qua aequatione ſeries idonea pro v elici debet.

§. 18. Cum igitur poſito $t = 0$ fiat $s = 1$, hoc caſu eſſe debebit $v = \frac{1}{t}$, quamobrem fingamus iſtam ſeriem:

$$v = \tfrac{1}{t} + a + bt + ctt + dt^3 + et^4 + \text{etc.},$$

qui valor ſequenti modo ſubſtituatur

∂v

$$\begin{array}{rl}
\frac{\partial v}{\partial t} = & -\frac{1}{tt} + * + b + 2ct + 3dtt + 4et^3 + 5ft^4 + 6gt^5 + \text{etc.} \\
-\frac{1\,\partial v}{\partial t} = & +\frac{1}{t} - * - b - 2c - 3d - 4e - 5f - \text{etc.} \\
+vv = & +\frac{1}{tt} + \frac{2a}{t} + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f + 2g + \text{etc.} \\
& + aa + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2af + \text{etc.} \\
& + bb + 2bc + 2bd + 2be + \text{etc.} \\
& + cc + 2cd + \text{etc.}
\end{array}$$

Hinc igitur prodeunt ſequentes determinationes:

$$1 + 2a = 0,$$
$$3b + aa = 0,$$
$$4c + 2ab - b = 0,$$
$$5d + 2ac - 2c + bb = 0,$$
$$6e + 2ad + 2bc - 3d = 0,$$
$$7f + 2ae + 2bd - 4e + cc = 0,$$

quae formulae ob $a = -\frac{1}{2}$ contrahuntur in ſequentes:

$$\begin{array}{ll}
3b = -\frac{1}{4} & \text{ergo } a = -\frac{1}{2} \\
4c = 2b & b = -\frac{1}{12} \\
5d = 3c - bb & c = -\frac{1}{24} \\
6e = 4d - 2bc & d = -\frac{19}{720} \\
7f = 5e - 2bd - cc & e = -\frac{3}{160} \\
8g = 6f - 2be - 2c\partial & f = -\frac{863}{32.2.0.7}.
\end{array}$$

§. 19. Hinc igitur erit ſeries quaeſita

$$s = 1 + at + btt + ct^3 + dt^4 + \text{etc.},$$

quae ſupra poſita fuerat

$$s = 1 + \alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \delta t^4 + \text{etc.}$$

litterae igitur latinae et graecae prorſus conueniunt, eritque ergo

$$\int y\,\partial x = -\frac{a}{2} - \frac{b}{3} - \frac{c}{4} - \frac{d}{5} - \frac{e}{6} - \text{etc.}$$

et

et valoribus modo inuentis ſubſtitutis

$$\int y\,\partial x = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.12} + \frac{1}{4.24} + \frac{19}{5.720} + \frac{3}{6.160} + \text{etc.}$$

§. 20. Quo autem calculus harum litterarum expeditior reddatur, ponamus $a = -\frac{A}{2}$, $b = -\frac{B}{4}$, $c = -\frac{C}{8}$, $d = -\frac{D}{16}$, $e = -\frac{E}{32}$, etc. vt ſit

$$\int y\,\partial x = \frac{A}{2.2} + \frac{B}{3.4} + \frac{C}{4.8} + \frac{D}{5.16} + \frac{E}{6.32} + \text{etc.}$$

pro his autem litteris habebimus ſequentes determinationes:

$A = 1$, | $E = \frac{8D + 2BC}{6}$,
$B = \frac{1}{3}$, | $F = \frac{10E + 2BD + CC}{7}$,
$C = \frac{4B}{4}$, | $G = \frac{12F + 2BE + 2CD}{8}$,
$D = \frac{6C + BB}{5}$, | etc.

vnde colligitur

$$A = 1,\ B = \tfrac{1}{3},\ C = \tfrac{1}{3},\ D = \tfrac{19}{45},\ E = \tfrac{39}{50},\ \text{etc.}$$

Haec igitur ad calculos ſuperiores ſublenandos ſufficere poterunt.

VBE-

VBERIOR EXPLICATIO
METHODI SINGVLARIS
NVPER EXPOSITAE, INTEGRALIA ALIAS MAXIME ABSCONDITA INVESTIGANDI.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 29 Febr. 1776.

Methodus illa ſingularis, qua non ita pridem deductus ſum ſum ad integrationem formulae $\int \frac{x^a - x^b}{l\,x} \partial x$, cuius valorem a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſum inueni eſſe $l \frac{a+1}{b+1}$ *), multo latius patet, ideoque accuratiorem euolutionem meretur, quandoquidem multo maiora incrementa ſcientiae analyticae polliceri videtur. Quo autem hoc feliciori ſucceſſu et ſine ambagibus praeſtari poſſit, neceſſe erit peculiarem ſignandi modum vſurpare, quem ergo ante omnia explicari conueniet.

EXPLICATIO CHARACTERVM in ſequentibus adhibendorum.

I. Si V denotet functionem quamcunque binarum variabilium x et p, tum iſte character: $\frac{\partial^\lambda}{x} V$, mihi deſignabit eam

*) Iam in diſſertatione praecedente annotauimus, Ill. Auctorem hanc integrationem expoſuiſſe in Nouorum Commentariorum Tomo. XIX. pag. 70.

eam quantitatem, quae oritur, ſi functio V, ſolam x pro variabili ſumendo, toties ſucceſſiue differentietur, quot vnitates in indice λ continentur, ſimulque vbique differentiale ∂x reiiciatur. Eodem modo iſte character: $\frac{\partial^\lambda}{p}.V$, deſignabit eam quantitatem, quae per totidem differentiationes reſultat, dum ſola p vt variabilis tractatur. Hinc igitur iſta ſignandi ratio ſequenti modo ad formulas vſu receptas reducetur:

$$\frac{\partial}{x}.V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \text{ et } \frac{\partial}{p}.V = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right),$$
$$\frac{\partial^2}{x}.V = \left(\frac{\partial\partial V}{\partial x^2}\right) \text{ et } \frac{\partial^2}{p}.V = \left(\frac{\partial\partial V}{\partial p^2}\right),$$
$$\frac{\partial^3}{x}.V = \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right) \text{ et } \frac{\partial^3}{p}.V = \left(\frac{\partial^3 V}{\partial p^3}\right).$$

II. Viciſſim autem integrando iſte character: $\frac{\int^\lambda}{x}.V$ deſignabit eam quantitatem, quae ex continua integratione λ vicibus repetita oritur, dum ſola x variabilis accipitur; et pariter hic character: $\frac{\int^\lambda}{p}.V$, eam quantitatem ſignificat, quae oritur per continuam integrationem λ vicibus repetitam, dum ſola p variabilis accipitur. Haec ergo ſequenti modo ad formas vſu receptas reuocabuntur:

$$\frac{\int}{x}.V = \int V\partial x \text{ et } \frac{\int}{p}.V = \int V\partial p,$$
$$\frac{\int^2}{x}.V = \int\partial x\int V\partial x \text{ et } \frac{\int^2}{p}.V = \int\partial p\int V\partial p,$$
$$\frac{\int^3}{x}.V = \int\partial x\int\partial x\int V\partial x \text{ et } \frac{\int^3}{p}.V = \int\partial p\int\partial p\int V\partial p.$$

III. At quoniam omnes quantitates per integrationem inuentae per ſe ſunt indeterminatae, in poſterum perpetuo omnia integralia ita capi ſtatuamus, vt euaneſcant poſito vel $x=0$ vel

vel $p = 0$; prius ſcilicet, ſi ſola x vt variabilis fuerit tractata, poſterius vero, ſi ſola p fuerit variabilis.

IV. Hos iam characteres pro lubitu inter ſe coniungere licet, ac primo quidem haec formula: $\frac{\partial^\mu}{x} \cdot \frac{\partial^\nu}{p} \cdot V$, denotat, functionem V primo μ vicibus differentiari debere, ſumta ſola x variabili; tum vero quantitatem hinc oriundam denuo ν vicibus differentiari debere, ſumta ſola p variabili. Hinc iſtos characteres ad morem ſolitum reuocando erit

$$\frac{\partial}{x} \cdot \frac{\partial}{p} \cdot V = \left(\frac{\partial \partial V}{\partial x \partial p}\right), \quad \frac{\partial}{p} \cdot \frac{\partial}{x} \cdot V = \left(\frac{\partial \partial V}{\partial p \partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2}{x} \cdot \frac{\partial}{p} \cdot V = \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial p}\right), \quad \frac{\partial}{x} \cdot \frac{\partial^2}{p} \cdot V = \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial p^2}\right),$$
$$\frac{\partial^3}{x} \cdot \frac{\partial^2}{p} \cdot V = \left(\frac{\partial^5 V}{\partial x^3 \partial p^2}\right), \quad \frac{\partial^2}{x} \cdot \frac{\partial^3}{p} \cdot V = \left(\frac{\partial^5 V}{\partial x^2 \partial p^3}\right),$$

etc. etc.

V. Ita formula $\frac{\partial^\mu}{x} \cdot \frac{\int^\nu}{p} \cdot V$ denotat, functionem V primo μ vicibus differentiari debere, ſumta ſola x variabili, tum vero quantitatem hinc oriundam ν vicibus integrari debere, ſumta ſola p variabili. Ita ſi fuerit $\mu = 2$ et $\nu = 1$, erit more ſolito $\frac{\partial^2}{x} \cdot \frac{\int^1}{p} \cdot V = \int \partial p \cdot \left(\frac{\partial \partial V}{\partial x^2}\right)$, vnde ſignificatio aliorum huiusmodi characterum iam ſatis intelligi poteſt.

VI. Simili modo formula hoc charactere deſignata: $\frac{\int^\mu}{x} \cdot \frac{\partial^\nu}{p} \cdot V$, declarat, functionem V primo μ vicibus integrari debere, ſumta ſola x variabili; tum vero quantitatem hinc oriundam ν vicibus differentiari debere, ſumta ſola p variabili. Quae ergo ſignificatio ſatis clare perſpicitur, etſi more ſolito non tam commode indicari poſſet. Si enim eſſet $\mu = 2$ et $\nu = 2$, va-

 lor

lor huius formulae: $\frac{\int^2}{x} \cdot \frac{\partial^2}{p} \cdot V$, hoc modo repraeſentari deberet: $\left(\frac{\partial\partial \cdot \int \partial x \int V \partial x}{\partial p^2} \right)$.

VII. Denique iſte character: $\frac{\int^\mu}{x} \cdot \frac{\int^\nu}{p} \cdot V$, ſignificat, functionem V primo μ vicibus integrari debere, ſumta ſola x pro variabili; tum vero quantitatem reſultantem denuo ν vicibus integrari debere, ſumta ſola p variabili. Vbi, quod in perpetuum eſt tenendum, priora integralia ita capi debent, vt euaneſcant poſito $x = 0$, poſteriora vero poſito $p = 0$.

Hac characterum explicatione praemiſſa ſequentia Theoremata probe notentur, quorum veritas ex iis, quae de indole functionum duarum variabilium ſunt expoſita, ſatis clare perſpicitur.

Theorema I.

Si V fuerit functio quaecunque duarum variabilium x et p, ſequens aequalitas ſemper locum habebit:

$$\frac{\partial^\mu}{x} \cdot \frac{\partial^\nu}{p} \cdot V = \frac{\partial^\nu}{p} \cdot \frac{\partial^\mu}{x} \cdot V.$$

Hinc ergo ſi ponamus

$$\frac{\partial^\mu}{x} \cdot V = Q \text{ et } \frac{\partial^\nu}{p} \cdot V = R, \text{ tum erit } \frac{\partial^\nu}{p} \cdot Q = \frac{\partial^\mu}{x} \cdot R.$$

Theorema II.

Si V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x et p, tum ſequens aequalitas ſemper locum habebit:

$$\frac{\int^\mu}{x} \cdot \frac{\partial^\nu}{p} \cdot V = \frac{\partial^\nu}{p} \cdot \frac{\int^\mu}{x} \cdot V.$$

Hinc

Hinc ſi ponamus

$$\frac{\int^{\mu}}{x} . V = Q \text{ et } \frac{\partial^{\nu}}{p} . V = R, \text{ erit } \frac{\partial^{\nu}}{p} . Q = \frac{\int^{\mu}}{x} . R.$$

Theorema III.

Si fuerit V functio quaecunque binarum variabilium x et p, tum ſequens aequalitas ſemper locum habebit:

$$\frac{\partial^{\mu}}{x} . \frac{\int^{\nu}}{p} . V = \frac{\int^{\nu}}{p} . \frac{\partial^{\mu}}{x} . V.$$

Hinc ſi ponamus $\frac{\partial^{\mu}}{x} . V = Q$ et $\frac{\int^{\nu}}{p} . V = R$, erit $\frac{\int^{\nu}}{p} . Q = \frac{\partial^{\mu}}{x} . R$.

Theorema IV.

Si fuerit V functio quaecunque binarum variabilium x et p, tum ſequens aequalitas ſemper locum habebit:

$$\frac{\int^{\mu}}{x} . \frac{\int^{\nu}}{p} . V = \frac{\int^{\nu}}{p} . \frac{\int^{\mu}}{x} . V.$$

Hinc ſi ponamus $\frac{\int^{\mu}}{x} . V = Q$ et $\frac{\int^{\nu}}{p} . V = R$, erit $\frac{\int^{\nu}}{p} . Q = \frac{\int^{\mu}}{x} R$.

Scholion.

Hae aequalitates per ſe ita ſunt manifeſtae, vt quouis caſu euolutae euadant identicae. Ita ſi ſumatur $V = x^m p^n$, ex theoremate primo ſumto, $\mu = 2$ et $\nu = 1$, reperietur

$$Q = \tfrac{\partial^2}{x} . V = m(m-1)\, x^{m-2} p^n \text{ et}$$
$$R = \tfrac{\partial}{p} . V = n\, p^{n-1} x^m.$$

Hinc vero elicitur

$\frac{\partial}{p} . Q$

$\frac{\partial}{p} \cdot Q = m\,n\,(m-1)\,x^{m-2}\,p^{n-1}$ et

$\frac{\partial^2}{x} \cdot R\; m\,n\,(m-1)\,x^{m-2}\,p^{n-1}$,

qui duo valores manifeſto congruunt. Ex ſecundo autem theoremate $\mu = 2$ et $\nu = 1$ fiet

$$Q = \frac{\int}{x} V = \frac{p^n\,x^{m+2}}{(m+1)\,(m+2)} \text{ et } R = \frac{\partial}{p} V = n\,p^{n-1}\,x^m.$$

Hinc ergo erit

$$\frac{\partial}{p} Q = \frac{n\,p^{n-1}\,x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \text{ et } \frac{\int^2}{x} \cdot R = \frac{n\,p^{n-1}\,x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}.$$

Ex tertio theoremate, manente $\mu = 2$ et $\nu = 1$, erit

$$Q = \frac{\partial^2}{x} \cdot V = m\,(m-1)\,x^{m-2}\,p^n \text{ et } R = \frac{\int}{p} V = \frac{p^{n+1}\,x^m}{n+1}.$$

Hinc igitur erit

$$\frac{\int}{p} Q = \frac{m\,(m-1)\,x^{m-2}\,p^{n+1}}{n+1} \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2}{x} R = \frac{m\,(m-1)\,x^{m-2}\,p^{n+1}}{n+1}.$$

Ex quarto denique theoremate erit

$$Q = \frac{\int^2}{p} V = \frac{x^{m+2}\,p^n}{(m+1)\,(m+2)} \text{ et } R = \frac{\int}{p} V = \frac{x^m\,p^{n+1}}{n+1}.$$

Hinc ergo colligitur:

$$\frac{\int}{p} Q = \frac{x^{m+2}\,p^{n+1}}{(n+1)(m+1)(m+2)} \text{ et } \frac{\int^2}{x} R = \frac{x^{m+2}\,p^{n+1}}{(n+1)(m+1)(m+2)}.$$

Ob has igitur aequalitates adeo identicas nullae concluſiones hinc deduci poſſe videbuntur. Verum longe aliter ſe res habere deprehenditur, ſi poſt omnes operationes inſtitutas ipſi x determinatus valor, veluti $x = 1$, tribui debeat, quemadmodum in

in quatuor Problematibus ſequentibus oſtendemus, quae ſe ad quatuor Theoremata praecedentia referunt.

Problema I.

Si V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x et p, et omnes operationes in Theoremate primo indicatae abſoluantur, tum vero ſtatuatur $x = 1$, exhibere aequalitatem, ad quam hoc Theorema perducit.

Solutio.

Quoniam in noſtro primo Theoremate poſuimus $\frac{\partial^\mu}{x} V = Q$, deinde vero haec quantitas, ſola p variabili ſumta, differentiari debet, ita vt iam x pro conſtanti habeatur, ſtatim loco x vnitas ſcribi poterit, quo facto abeat Q in M, ita vt nunc M futura ſit functio ſolius p. Manente igitur $R = \frac{\partial^\nu}{p} . V$ conſequemur hanc aequationem: $\frac{\partial^\nu}{p} M = \frac{\partial^\mu}{x} R$, vbi plerumque eueniet, vt quantitas M multo promptius differentiari queat quam functio Q, vnde aequalitas inuenta plerumque non adeo erit obuia, id quod ſequentibus exemplis illuſtraſſe iuuabit, in quibus omnibus aſſumemus $V = x^{n+p}$, ita vt eius valor poſito $x = 1$ abeat in 1.

Exemplum I, quo $\mu = 1$ et $\nu = 1$.

Hic ergo erit

$$Q = \frac{\partial}{x} . x^{n+p} = (n+p) x^{n+p-1},$$

vnde ergo poſito $x = 1$ fit $M = n + p$; quare cum ſit

$$R = \frac{\partial}{p} . x^{n+p} = x^{n+p} \, l\, x,$$

nancis-

nanciſcimur hanc aequationem: $1 = \frac{\partial}{x} . x^{n+p} \, l \, x$. Vnde patet, ſi poſt differentiationem ponatur $x = 1$, fore more exprimendi ſolito $\frac{1}{\partial x} \partial . x^{n+p} \, l \, x = 1$, id quod non amplius tam eſt obvium: eſt enim

$$\partial . x^{n+p} \, l \, x = (n+p) \, x^{n+p-1} \partial x \, l \, x + x^{n+p-1} \partial x,$$

quae expreſſio per ∂x diuiſa, poſitoque $x = 1$, abit in 1.

Exemplum II, quo $\mu = 2$ et $\nu = 1$.

Hic igitur erit

$$Q = \frac{\partial^2}{x} x^{n+p} = (n+p)(n+p-1) \, x^{n+p-2},$$

poſito ergo $x = 1$, erit $M = (n+p)(n+p-1)$. Quare cum ſit $R = x^{n+p} \, l \, x$, erit

$$\frac{\partial}{p} (n+p)(n+p-1) = \frac{\partial^2}{x} x^{n+p} \, l \, x,$$

quamobrem per ſolitum exprimendi modum habebimus:

$$\frac{\partial \partial \, x^{n+p} \, l \, x}{\partial x^2} = 2(n+p) - 1,$$

poſtquam ſcilicet gemina differentiatione abſoluta ponitur $x = 1$.

Exemplum III, quo $\mu = 1$ et $\nu = 2$.

Hic igitur erit

$$Q = \frac{\partial}{x} . x^{n+p} = (n+p) \, x^{n+p-1},$$

vnde poſito $x = 1$ fit $M = n+p$. Quare cum ſit

$$R = \frac{\partial^2}{p} . x^{n+p} = x^{n+p} (l \, x)^2, \text{ erit}$$

$$\frac{\partial^2}{p} (n+p) = \frac{\partial}{x} x^{n+p} (l \, x)^2,$$

ſiue ſolito exprimendi more $\frac{\partial . x^{n+p} (l \, x)^2}{\partial x} = 0$, poſtquam ſcilicet differentiatione abſoluta ponitur $x = 1$.

Ex-

Exemplum IV, quo $\mu = 2$ et $\nu = 2$.

Cum igitur hoc caſu ſit

$$Q = \frac{\partial^2}{x} x^{n+p} = (n+p)(n+p-1)\, x^{n+p-2},$$

ideoque

$$M = (n+p)(n+p-1) \text{ et } R = \frac{\partial^2}{p} x^{n+p} = x^{n+p} (l\,x)^2,$$

erit

$$\frac{\partial \partial \,.\, x^{n+p} (l\,x)^2}{\partial x^2} = \frac{\partial \partial M}{\partial p^2} = 2.$$

Corollarium.

Ex his exemplis iam abunde ſit perſpicuum, ſi exponentes μ et ν fuerint quicunque, tum poſito $x = 1$ fore

$$M = (n+p)(n+p-1) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (n+p-\mu+1),$$

ideoque functionem ipſius p tantum. Quare cum ſit $R = x^{n+p} (l\,x)^\nu$, erit more ſolito $\frac{\partial^\mu x^{n+p} (l\,x)^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^\nu . M}{\partial p^\nu}$, quando ſcilicet omnibus operationibus peractis ſtatuitur $x = 1$.

Scholion.

Quemadmodum hic aſſumſimus $V = x^{n+p}$, ita eadem opera expedire licet hanc formam latius patentem: $V = x^p X$, denotante X functionem quamcunque ipſius x tantum, ita vt altera quantitas p non ingrediatur. Ponamus igitur ſumto $x = 1$ fieri $X = A$, $\frac{\partial X}{\partial x} = A'$, $\frac{\partial \partial X}{\partial x^2} = A''$, etc. atque cum fiat

$$Q = \frac{\partial}{x} V = p\, x^{p-1} X + x^p \frac{\partial X}{\partial x},$$

erit hoc caſu $M = p\,A + A'$. Deinde vero habebimus

$$\frac{\partial^2}{x} V = p(p-1)\, x^{p-2} X + 2\, p\, x^{p-1} \frac{\partial X}{\partial x} + x^p \frac{\partial \partial X}{\partial x^2} = Q;$$

 hinc

hinc ergo colligitur $M = p(p-1)A + 2pA' + A''$. Prodit porro

$$\frac{\partial^3}{x} V = p(p-1)(p-2)x^{p-3}X + 3p(p-1)x^{p-2}\frac{\partial X}{\partial x} + 3p\,x^{p-1}\cdot\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} + x^p\frac{\partial^3 X}{\partial x^3},$$

hinc ergo erit

$$M = p(p-1)(p-2)A + 3p(p-1)A' + 3pA'' + A'''.$$

Hinc iam patet, ex formula $\frac{\partial^4}{x} V$ oriturum eſſe valorem

$$M = p(p-1(p-2)(p-3)A + 4p(p-1)(p-2)A' + 6p(p-1)A'' + 4pA''' + A'''',$$

vnde lex progreſſionis ſatis eſt manifeſta. At vero pro altera littera R habebimus:

caſu $\nu = 1$, $R = x^p X\, l\, x$,

caſu $\nu = 2$, $R = x^p X(l\, x)^2$,

caſu $\nu = 3$, $R = x^p X(l\, x)^3$,

atque adeo in genere caſu $\nu = \nu$, erit $R = x^p X(l\, x)^\nu$. Ex his igitur formulis nanciſcemur valores differentialium omnium ordinum formulae $x^p X(l\, x)^\nu$, poſtquam factis omnibus operationibus poſitum fuerit $x = 1$:

$$1^\circ.\ \frac{1}{\partial x}\cdot\partial.\, x^p X(l\, x)^\nu = \frac{\partial^\nu(pA + A')}{\partial p^\nu},$$

qui valor ſemper erit $=0$, excepto caſu $\nu = 1$, quo prodit $=A$.

$$2^\circ.\ \frac{1}{\partial x^2}\partial\partial\,.\, x^p X(l\, x)^\nu = \frac{\partial^\nu(p(p-1)A + 2pA' + A'')}{\partial p^\nu},$$

qui valor ſemper eſt o quando $\nu > 2$.

$$3^\circ.\ \frac{1}{\partial x^3}\partial^3\,.\, x^p X(l\, x)^\nu = \frac{\partial^\nu(p(p-1)(p-2)A + 3p(p-1)A' + 3pA'' + A''')}{\partial p^\nu},$$

qui valor ſemper euaneſcit, exceptis caſibus quibus $\nu = < 3$.

In his formulis notaſſe iuuabit eſſe

Pro

Pro prima:

$$\frac{\partial(pA + A')}{\partial p} = A.$$

Pro ſecunda:

$$\frac{\partial(p(p-1)A + 2pA' + A'')}{\partial p} = (2p - 1)A + 2A' \text{ et}$$

$$\frac{\partial\partial(p(p-1)A + 2pA' + A'')}{\partial p^2} = 2A,$$

ſequentia autem ſunt 0.

Pro tertia:

$$\frac{\partial(p(p-1)(p-2)A + 3p(p-1)A' + 3pA'' + A''')}{\partial p} =$$

$$(3pp - 6p + 2)A + 3(2p-1)A' + 3A'';$$

$$\frac{\partial\partial(p(p-1)(p-2)A + 3p(p-1)A' + 3pA'' + A''')}{\partial p^2} =$$

$$(6p - 6)A + 6A' \text{ et}$$

$$\frac{\partial^3(p(p-1)(p-2)A + 3p(p-1)A' + 3pA'' + A''')}{\partial p^3} = 6A,$$

ſequentia omnia euaneſcunt.

Problema II.

Si V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x et p, et omnes operationes in Theoremate ſecundo indicatae abſoluantur, tum vero ſtatuatur $x = 1$; exhibere aequalitatem ad quam hoc Theorema perducit.

Solutio.

Quoniam in noſtro ſecundo Theoremate poſuimus $\frac{\int^\mu}{x} V = Q$, deinde vero haec quantitas, ſumta ſola p variabili, ν vicibus differentiari debet, poſita x conſtante, iam ante has differentiationes ponere licet $x = 1$. Hoc ergo facto abeat Q in M, ſicque habebitur $\frac{\partial^\nu}{p} . Q = \frac{\partial^\nu M}{\partial p^\nu}$, quod iam eſt membrum primum aequalitatis quaeſitae more ſolito expreſſum, quandoquidem M eſt ſola functio ipſius p. Pro altero membro

D 2 cum

cum ſit $R = \frac{\partial^\nu}{p} . V$, erit hoc alterum membrum $\frac{\int^\mu}{x} R$. Quamobrem ſi poſt omnes has μ integrationes peractas (quae autem ſingula integralia ſemper ita ſunt capienda, vt euaneſcant poſito $x = 0$), ſtatuatur: $x = 1$, ſemper erit $\frac{\int^\mu}{x} R = \frac{\partial^\nu M}{\partial p^\nu}$, de quo valore certi ſumus, etiamſi forte integratio abſolui nequeat, quamobrem hanc veritatem exemplis illuſtremus, in quibus aſſumemus $V = x^{n+p}$.

Exemplum I, quo $\mu = 1$ et $\nu = 1$.

Hoc ergo caſu erit

$$Q = \int x^{n+p} \partial x = \frac{x^{n+p+1}}{n+p+1},$$

vnde fit $M = \frac{1}{n+p+1}$. Deinde vero erit

$$R = \frac{\partial}{p} x^{n+p} = x^{n+p} l x,$$

ex quibus aequatio noſtra fiet

$$\int x^{n+p} \partial x \, l x = \partial \frac{1}{n+p+1} = \frac{-1}{(n+p-1)^2}.$$

Exemplum II, quo $\mu = 1$ et $\nu = 2$.

Hoc ergo caſu erit

$$Q = \frac{\int}{x} x^{n+p} = \frac{x^{n+p+1}}{n+p+1},$$

ideoque M vt ante $\frac{1}{n+p+1}$. Deinde vero erit

$$R = \frac{\partial^2}{p} x^{n+p} = x^{n+p} (l x)^2,$$

quocirca poſito $x = 1$ habebitur iſta aequatio:

$$\int x^{n+p} \partial x \, (l x)^2 = \frac{\partial \partial}{p} \frac{1}{n+p+1} = \frac{+2}{(n+p+1)^3}.$$

Ex-

Exemplum III, quo $\mu = 1$ et $\nu = 3$.

Hoc igitur caſu erit

$$Q = \frac{x^{n+p+1}}{n+p+1} \text{ et } M = \frac{1}{n+p+1}.$$

Tum vero erit $R = x^{n+p}(l\,x)^3$, vnde naſcitur haec aequalitas:

$$\int x^{n+p}\,\partial x\,(l\,x)^3 = + \frac{\partial^3}{p} \cdot \frac{1}{n+p+1} = \frac{-6}{(n+p+1)^4}.$$

Exemplum IV, quo $\mu = 1$ et $\nu = \nu$.

Hic ex praecedentibus ſatis liquet, aequationem hinc reſultantem fore

$$\int x^{n+p}\,\partial x\,(l\,x)^\nu = \pm \frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\,\nu}{(n+p+1)^{\nu+1}},$$

vbi ſignum ſuperius valet ſi ν ſit numerus par, inferius vero ſi impar, quae reductio eo magis eſt notatu digna, quod alias per plures ambages ad eam perueniri ſolet.

Exemplum V, quo $\mu = 2$ et $\nu = 1$.

Hoc ergo caſu erit

$$Q = \frac{\int^2}{x} x^{n+p} = \frac{x^{n+p+2}}{(n+p+1)\,(n+p+2)},$$

quamobrem habebitur $M = \frac{1}{(n+p+1)(n+p+2)}$, qui valor reducitur ad hunc:

$$M = \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p+2};$$

tum vero erit $R = x^{n+p}\,l\,x$, vnde ſequens aequalitas deducitur:

$$\int \partial x \int x^{n+p}\,\partial x\,l\,x = \frac{-1}{(n+p+1)^2} + \frac{1}{(n+p+2)^2},$$

quae aequalitas more ſolito indagata iam ſatis moleſtos calculos poſtulat.

Exemplum VI, quo $\mu = 2$ et $\nu = 2$.

Hic ergo erit vt ante

$$M = \frac{1}{(n+p+1)(n+p+2)} = \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p+2}$$

et $R = x^{n+p}(l\,x)^2$, vti in Exemplo II. vnde ſtatim colligitur iſta aequatio:

$$\int \partial x \int x^{n+p} \partial x\,(l\,x)^2 = \frac{\partial\partial M}{\partial p^2} = \frac{2}{(n+p+1)^3} - \frac{2}{(n+p+2)^3}.$$

Exemplum VII, quo $\mu = 2$ et $\nu = \nu$.

Hic ergo erit

$$M = \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p+2} \text{ et } R = x^{n+p}(l\,x)^\nu,$$

vnde reſultat aequatio:

$$\int \partial x \int x^{n+p} \partial x\,(l\,x)^\nu = \pm \frac{1 \ldots \nu}{(n+p+1)^{\nu+1}} \mp \frac{1 \ldots \nu}{(n+p+2)^{\nu+1}},$$

vbi iterum ſigna ſuperiora valent ſi ν numerus par, inferiora vero ſi impar.

Exemplum VIII, quo $\mu = 3$ et $\nu = \nu$.

Pro hoc caſu ob

$$Q = \frac{\int^3}{x} x^{n+p} = \frac{n+p+3}{(n+p+1)(n+p+2)(n+p+3)},$$

poſito $x = 1$ fit

$$M = \frac{1}{(n+p+1)(n+p+2)(n+p+2)},$$

quae fractio reſoluatur in ſuas ſimplices, fietque

$$M = \frac{1}{2(n+p+1)} - \frac{1}{n+p+2} + \frac{1}{2(n+p+3)},$$

vnde facile patet, ſequentem prodituram eſſe aequalitatem:

$$\int \partial x \int \partial x \int x^{n+p} (l\,x)^\nu = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots \nu}{(n+p+1)^{\nu+1}} \mp \frac{2 \ldots \nu}{(n+p+2)^{\nu+1}} \pm \frac{3 \cdot 4 \ldots \nu}{(n+p+2)^{\nu+1}}$$

$$= \pm 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots \nu \left(\frac{1}{(n+p+1)^{\nu+1}} - \frac{2}{(n+p+2)^{\nu+1}} + \frac{1}{(n+p+3)^{\nu+1}} \right),$$

vbi

vbi ratio ſigni ambigui eſt eadem vt ante. Facile autem intelligitur, ſi quis formulam illam integralem euoluere voluerit, eum in calculos valde moleſtos eſſe delapſurum.

Scholion.

Superfluum foret indici μ maiores valores tribuere, ſiquidem euolutio ſimili modo expediri poſſet. Praecipuum autem negotium conſiſtit in reſolutione fractionis M in ſuas fractiones ſimplices, id quod neceſſe eſt, vt deinceps facilius omnes differentiationes, atque adeo ſecundum indicem indefinitum ν inſtitui queant. Hic autem labor ſubſidio ſequentis Propoſitionis promptiſſime abſolui poterit.

Propoſitio.

Si X fuerit functio quaecunque ipſius x, ac poſt integrationes ſtatui debeat $x = 1$, tum ſemper iſta formula integralis complicata $\frac{\int^{\mu}}{x} . X$ reduci poteſt ad iſtam formulam integralem ſimplicem more ſolito expreſſam: $\frac{\int X \partial x (1-x)^{\mu-1}}{1.2.3 \ldots (\mu-1)}$. Hinc enim ſtatim patet, pro noſtro caſu quo $X = x^{n+p}$, quantitatem M ſequenti modo expreſſum iri

$$M = \frac{1}{1.2\ldots(\mu-1)}\Big(\frac{1}{n+p+1} - \frac{(\mu-1)}{n+p+2} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2\ldots(n+p+3)} - \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3\ldots(n+p+4)} \text{ etc.}\Big),$$

vnde iam facile differentialia omnium ordinum ipſius M derivari poſſunt. Ceterum hic adhuc obſeruaſſe iuuabit, loco functionis illius V vix alium valorem accipi poſſe praeter x^{n+p}, propterea quod hoc ſolo caſu omnia $\frac{\int^{\mu}}{x} V$ actu expedire licet,

id

id quod ad noſtrum inſtitutum imprimis requiritur, quia alioquin nullae aequationes memorabiles inde deduci poſſent.

Problema III.

Si V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x et p, et omnes operationes in Theoremate tertio indicatae actu abſoluantur, tum vero ſtatuatur $x = 1$, exhibere aequalitatem, ad quam hoc Theorema perducit.

Solutio.

Quoniam in noſtro tertio Theoremate poſuimus

$$\frac{\partial^\mu}{x} V = Q \text{ et } \frac{\int^\nu}{p} V = R,$$

hinc deduximus ſequentem aequalitatem: $\frac{\int^\nu}{p} Q = \frac{\partial^\mu}{x} R$, vbi in valore pro Q inuento loco x vnitas ſcribi debet, vnde reſultet quantitas M, quae iam tantum erit functio ipſius p, ita vt nunc aequalitas noſtra euadat $\frac{\partial^\nu}{p} M = \frac{\partial^\mu}{x} R$. Quod ſi iam loco V hanc accipiamus functionem: x^{n+p}, pro variis valoribus indicis μ littera M ſequentes ſortietur valores:

1°. Si $\mu = 1$ erit $M = n + p$,

2°. Si $\mu = 2$ erit $M = (n + p)(n + p - 1)$,

4°. Si $\mu = 3$ erit $M = (n + p)(n + p - 1)(n + p - 2)$,

etc.

hincque in genere

$$M = (n + p)(n + p - 1) \ldots \ldots (n + p - \mu + 1).$$

Pro littera autem R ex valoribus ſimplicioribus indicis ν colligetur:

ſi

1°. Si $\nu = 1$, valor $R = \frac{x^{n+p}}{l\,x} + C$,

quae conſtans C cum ita debeat accipi, vt integrale euaneſcat poſito $p = 0$, erit hac correctione adhibita $R = \frac{x^{n+p}}{l\,x} - \frac{x^n}{l\,x}$, quae formula ducta in ∂p et denuo integrata, adiectaque debita conſtante praebet:

2°. Si $\nu = 2$. --- $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{(l\,x)^2} - \frac{p\,x^n}{l\,x}$,

3°. Si $\nu = 3$. --- $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{(l\,x)^3} - \frac{p\,x^n}{(l\,x)^2} - \frac{p\,p\,x^n}{2\,l\,x}$,

4°. Si $\nu = 4$. --- $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{(l\,x)^4} - \frac{p\,x^2}{(l\,x)^3} - \frac{p\,p\,x^n}{2(l\,x)^2} - \frac{p^3\,x^n}{6\,l\,x}$,

vnde concluditur in genere eſſe proditurum:

$$R = \frac{x^{n+p}}{(l\,x)^\nu} - x^n\left(\frac{1}{(l\,x)^\nu} + \frac{p}{(l\,x)^{\nu-1}} + \frac{p\,p}{1.2\,(l\,x)^{\nu-2}} + \ldots \frac{+\,p^{\nu-1}}{1.2.3..(\nu-1)\,l\,x}\right).$$

His igitur valoribus euolutis ſequentia exempla euoluamus.

Exemplum I, quo $\mu = 1$ et $\nu = 1$.

Hoc ergo caſu erit $M = n + p$ et $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{l\,x}$, vnde oritur haec aequalitas:

$$\frac{1}{\partial x} \cdot \frac{\partial\,.\,(x^{n+p} - x^n)}{l\,x} = \frac{\int}{p}(n+p) = n\,p + \frac{p\,p}{2},$$

more ſolito expreſſa. Hic ſcilicet forma $\frac{x^{n+p} - x^n}{l\,x}$ per ſolam variabilem x differentiata et per ∂x diuiſa, ſi loco x ſcribatur

batur 1, producet hunc valorem: $np + \frac{1}{2}pp$, id quod neutiquam tam facile perſpicitur. Si enim illa quantitas differentietur, omiſſo elemento ∂x, peruenitur ad iſtam expreſſionem:

$$\frac{(n+p)\,x^{n+p-1} - n\,x^{n-1}}{l\,x} - \frac{(x^{n+p-1} - x^{n-1})}{(l\,x)^2},$$

vbi iam poni oportet $x = 1$; tum autem vtrumque membrum euadit infinitum, quamobrem has duas fractiones ante omnia ad eundem denominatorem reduci conuenit, vt habeatur iſta fractio: $\frac{(n+p)\,x^{n+p-1}\,l\,x - n\,x^{n-1}\,l\,x - x^{n+p-1} + x^{n-1}}{(l\,x)^2}$, cuius tam numerator quam denominator euaneſcunt facto $x = 1$. Quamobrem ſecundum regulam cognitam loco tam numeratoris quam denominatoris eorum differentialia ſcribantur, ac pro numeratore reperietur:

$$(n+p)(n+p-1)\,x^{n+p-2}\,lx + (n+p)\,x^{n+p-2} - n(n-1)\,x^{n-2}\,lx - nx^{n-2}$$
$$- (n+p-1)\,x^{n+p-2} + (n-1)\,x^{n-2};$$

denominator vero erit $\frac{2\,l\,x}{x}$, ita vt iam tota fractio ſit

$$\frac{(n+p)(n+p-1)x^{n+p-1}lx + (n+p)x^{n+p-1} - n(n-1)x^{n-1}lx - (n+p-1)x^{n+p-1} - x^{n-1}}{2\,l\,x}$$

vbi denuo, poſito $x = 1$, tam numerator quam denominator euaneſcunt; quamobrem eorum loco iterum differentialia ſubſtituamus, quo facto prodibit fractio, cuius numerator erit

$$(n+p-1)^2\,x^{n+p-2}\,[(n+p)\,l\,x - 1] + 2\,(n+p)\,(n+p-1)\,x^{n+p-2}$$
$$- n\,(n-1)^2\,x^{n-2}\,l\,x - (n\,n-1)\,x^{n-2},$$

denominator vero erit $\frac{2}{x}$. Hic iam facto $x = 1$ numerator dabit

$$2\,(n+p)\,(n+p-1) - (n+p-1)^2 - (nn-1) = 2\,np + pp,$$

deno-

denominator vero 2, vnde valor quaeſitus reſultat $n p + \frac{1}{2} p p$, prorſus vti ſupra inuenimus. Hinc igitur abunde patet egregius vſus noſtrae reductionis. Quin etiam caſus adhuc ſimplicior, quo $\mu = 0$, haud exiguam moram creat.

Exemplum II, quo $\mu = 0$ et $\nu = 1$.

Hic erit $M = 1$, ob $Q = x^{n+p}$, manente $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{l x}$, tum erit $\frac{\int}{p} . M = p$, vnde aequatio more ſolito expreſſa fiet $\frac{x^{n+p} - x^n}{l x} = p$. Poſito autem $x = 1$ in parte ſiniſtra tam numerator quam denominator euaneſcunt, vnde eorum differentialibus ſubſtitutis iſta fractio euadet

$$\frac{(n+p) x^{n+p-1} - n x^{n-1}}{1 : x},$$

quae fractio poſito $x = 1$ praebet p.

Exemplum III, quo $\mu = 0$ et $\nu = 2$.

Hic ergo erit $M = 1$, ideoque $\frac{\int^2}{p} . M = \frac{1}{2} p p$, cui ergo ipſa quantitas R aequabitur; ſicque orietur haec aequatio:

$$\frac{x^{n+p} - x^n}{(l x)^2} - \frac{p x^n}{l x} = \frac{1}{2} p p,$$

cuius veritas neutiquam in oculos incurrit; quamobrem quantitas R ad vnicam fractionem reducatur, quae erit $\frac{x^{n+p} - x^n - p x^n l x}{(l x)^2}$, quae fractio, ſi loco numeratoris et denominatoris eorum differentialia ſubſtituantur, abit in ſequentem:

$$\frac{(n+p)\,x^{n+p} - n\,x^n - n\,p\,x^n\,l\,x - p\,x^n}{2\,l\,x};$$

haec vero fractio eadem operatione inſtituta reducitur ad hanc:

$$\frac{(n+p)^2\,x^{n+p} - n\,n\,x^n - n\,n\,p\,x^n\,l\,x - 2\,n\,p\,x^n}{2}$$

quae expreſſio poſito $x = 1$ manifeſto abit in $\frac{1}{2}\,p\,p$.

Exemplum IV, quo $\mu = 0$ et $\nu = \nu$.

Hic ergo erit $M = 1$, ideoque $\int^{\nu}_{p} M = \frac{p^{\nu}}{1.\,2.\,3\,\ldots\,\nu}$.

Porro vero vidimus eſſe

$$R = \frac{x^{n+p}}{(l\,x)^{\nu}} - x^n \left(\frac{1}{(l\,x)^{\nu}} + \frac{p}{(l\,x)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{p^{\nu-1}}{1.\,2.\,3\,\ldots\,(\nu-1)\,l\,x} \right),$$

atque haec expreſſio R ita eſt comparata, vt poſito $x = 1$ eius valor futurus ſit $\frac{p^{\nu}}{1.\,2.\,3\,\ldots\,\nu}$.

Exemplum V, quo $\mu = 1$ et $\nu = \nu$.

Hic ergo erit $M = n + p$ ideoque

$$\int^{\nu}_{p} M = \frac{n(\nu+1)\,p^{\nu} + p^{\nu+1}}{1.\,2.\,3\,\ldots\,(\nu+1)}.$$

Quod ſi iam ponatur

$$R = \frac{x^{n+p}}{(l\,x)^{\nu}} - x^n \left(\frac{1}{(l\,x)^{\nu}} + \frac{p}{(l\,x)^{\nu-1}} + \frac{p\,p}{1.\,2\,(l\,x)^{\nu-2}} + \ldots + \frac{p^{\nu-1}}{1.\,2\,\ldots\,(\nu-1)\,l\,x} \right)$$

quae expreſſio vt functio ſolius x ſpectetur, tum poſito $x = 1$ erit more ſolito $\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = \frac{p^{\nu}\,[n\,(\nu+1) + p]}{1.\,2.\,3\,\ldots\,(\nu+1)}$. Vbi facile intelligitur, differentiale ipſius R formulam producere multo magis

magis complicatam, cuius omnibus terminis ad communem denominatorem reductis, qui erit $(lx)^{\nu+1}$, ſi per regulam vulgarem iſtius fractionis valorem caſu $x = 1$ explorare vellemus, tum tam numerator quam denominator $\nu + 1$ vicibus differentiari deberent, antequam eius verus valor definiri poſſet, quem tamen nunc certe nouimus fore $\frac{p^\nu [n(\nu + 1) + p]}{1.2.3 \ldots (\nu + 1)}$.

Exemplum VI, quo $\mu = 2$ et $\nu = \nu$.

Hic ergo erit

$$M = (n + p)(n + p - 1) = n(n - 1) + (2n - 1)p + pp$$

ideoque

$$\frac{\int^\nu}{p} M = \frac{n(n-1)p^\nu}{1.2.3 \ldots \nu} + \frac{(2n-1)p^{\nu+1}}{1.2.3 \ldots (\nu+1)} + \frac{p^{\nu+2}}{1.2.3 \ldots (\nu+2)},$$

tum igitur, ſi vt ante fuerit

$$R = \frac{x^{n+p}}{(lx)^\nu} - x^n \left(\frac{1}{(lx)^\nu} + \frac{p}{(lx)^{\nu-1}} + \frac{pp}{1.2(lx)^{\nu-2}} + \ldots + \frac{p^{\nu-1}}{1.2 \ldots (\nu-1) lx} \right)$$

caſu $x = 1$ erit

$$\left(\frac{\partial \partial R}{\partial x^2} \right) = \frac{n(n-1)p^\nu}{1.2.3 \ldots \nu} + \frac{(2n-1)p^{\nu+1}}{1.2.3 \ldots (\nu+1)} + \frac{p^{\nu+2}}{1.2.3 \ldots (\nu+2)}$$

quam veritatem more conſueto euoluere nemo certe ſusceperit. Atque ex his iam facile apparet, quomodo has concluſiones pro maioribus valoribus indicis μ formari oporteat.

Problema IV.

Si V fuerit functio quaecunque binarum variabilium x et p, et omnes operationes in Theoremate quarto indicatae abſoluantur, tum vero ſtatuatur $x = 1$, exhibere aequalitatem ad quam hoc Theorema perducit.

 So-

Solutio.

Quoniam in noſtro Theoremate quarto poſuimus $Q = \frac{\int^{\mu}}{x} . V$, qui valor poſito $x = 1$ abeat in M, ita vt M futura ſit ſola functio ipſius p, tum vero $R = \frac{\int^{\nu}}{p} . V$, vi noſtri Theorematis ſemper erit $\frac{\int^{\mu}}{x} R = \frac{\int^{\nu}}{x} . M$, ſiquidem omnes integrationes ita abſoluantur, vt ſingula integralia euaneſcant, poſito ſiue $x = 0$, ſiue $p = 0$, omnibus autem operationibus peractis ſtatuatur $x = 1$. Quod ſi iam pro V accipiamus hanc functionem: x^{n+p}, primo valores litterae M pro variis indicibus μ ſequenti modo ſe habebunt:

1°. Si $\mu = 0$ erit $M = 1$;
2°. Si $\mu = 1$ erit $M = \frac{1}{n+p+1}$;
3°. Si $\mu = 2$ erit $M = \frac{1}{(n+p+1)(n+p+2)}$;
4°. Si $\mu = 3$ erit $M = \frac{1}{(n+p+1)(n+p+2)(n+p+3)}$.

Hi autem valores ipſius M ope propoſitionis ſupra allegatae, qua erat

$$M = \frac{1}{1.2.3\ldots(\mu-1)} \left(\frac{1}{n+p+1} - \frac{\mu-1}{n+p+2} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2(n+p+3)} - \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3(n+p+4)} \text{ etc.} \right)$$

ſequenti modo pro variis valoribus indicis μ ſe habebunt:

Si $\mu = 0$ valor $M = 1$;
Si $\mu = 1$ . . . $M = \frac{1}{n+p+1}$;
Si $\mu = 2$ . . . $M = \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p+2}$;
Si $\mu = 3$ . . . $M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+p+1} - \frac{2}{n+p+2} + \frac{1}{n+p+3} \right)$
Si $\mu = 4$ . . . $M = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+p+1} - \frac{3}{n+p+2} + \frac{3}{n+p+3} - \frac{1}{n+p+4} \right)$
Si $\mu = 5$ . . . $M = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{n+p+1} - \frac{4}{n+p+2} + \frac{6}{n+p+3} - \frac{4}{n+p+4} + \frac{1}{n+p+5} \right)$.
etc. etc.

Dein-

Deinde pro littera R, ſi indici ν ſucceſſiue tribuantur valores 0, 1, 2, 3, 4, etc. reperietur:

1°. Si $\nu = 0$ fore $R = x^{n+p}$;

2°. Si $\nu = 1$ ... $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{l x}$;

3°. Si $\nu = 2$ ... $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{(l x)^2} - \frac{p x^n}{l x}$;

4°. Si $\nu = 3$ ... $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{(l x)^3} - \frac{p x^n}{(l x)^2} - \frac{p p x^n}{2 l x}$;

5°. Si $\nu = 4$ ... $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{(l x)^4} - \frac{p x^n}{(l x)^3} - \frac{p p x^n}{2 (l x)^2} - \frac{p^3 x^n}{6 l x}$.

Hinc igitur ſequentia Exempla euoluamus.

Exemplum I, quo $\mu = 0$ et $\nu = 0$.

Hoc caſu erit $M = 1$ et $R = x^{n+p}$, vnde facto $x = 1$ erit vtique $x^{n+p} = 1$.

Exemplum II, quo $\mu = 0$ et $\nu = 1$.

Hoc ergo caſu erit $M = 1$ et $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{l x}$, vnde poſito $x = 1$ fiet $\frac{x^{n+p} - x^n}{l x} = p$.

Exemplum III, quo $\mu = 0$ et $\nu = 2$.

Hoc ergo caſu adhuc eſt

$$M = 1 \text{ et } R = \frac{x^{n+p} - x^n}{(l x)^2} - \frac{p x^n}{l x}.$$

Hinc ergo poſito $x = 1$ prodibit iſta aequalitas:

$$\frac{x^{n+p}}{(l x)^2} - x^n \left(\frac{1}{(l x)^2} + \frac{p}{l x} \right) = \frac{p p}{2}.$$

Exem-

Exemplum IV, quo $\mu = 0$ et $\nu = 3$.

Hic ergo, manente $M = 1$, erit

$$R = \frac{x^{n+p}}{(lx)^3} - x^n \left(\frac{1}{(lx)^3} + \frac{p}{(lx)^2} + \frac{pp}{2lx} \right);$$

quare poſito $x = 1$ habebitur iſta aequatio:

$$\frac{x^{n+p}}{(lx)^3} - x^n \left(\frac{1}{(lx)^3} + \frac{p}{(lx)^2} + \frac{pp}{2(lx)} \right) = \frac{p^3}{6}.$$

Haec autem exempla iam in praecedente problemate occurrunt, quia ſigna $\int^0$ et ∂^0 aequiualent.

Exemplum V, quo $\mu = 1$ et $\nu = 1$.

Hoc caſu erit $M = \frac{1}{n+p+1}$ et $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{lx}$, vnde cum fiat $\int R \partial x = \int M \partial p$, erit

$$\int \frac{x^{n+p} - x^n}{lx} \partial x = l \frac{n+p+1}{n+1},$$

quod eſt illud ipſum Theorema, quod non ita pridem inueneram et Geometris propoſueram.

Exemplum VI, quo $\mu = 2$ et $\nu = 1$.

Hoc caſu erit $M = \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p+2}$, manente $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{lx}$. Hinc igitur poſito $x = 1$ oritur iſta aequatio:

$$\int \partial x \int \frac{x^{n+p} - x^n}{lx} \partial x = l \frac{n+p+1}{n+1} - l \frac{n+p+2}{n+2};$$

haec autem veritas haud difficulter ex praecedenti exemplo deduci poteſt. Cum enim in genere ſit $\int \partial x \int R \partial x = x \int R \partial x - \int R x \partial x$, ideoque caſu $x = 1$

$\int \partial x$

$$\int \partial x \int R \partial x = \int R \partial x - \int R x \partial x ,$$

ob $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{l x}$ erit ex exemplo praecedente $\int R \partial x = l \frac{n+p+1}{n+1}$, atque indidem, loco n ſcribendo $n+1$, erit $\int R x \partial x = l \frac{n+p+2}{n+2}$, ſicque ipſe valor inuentus prodit.

Exemplum VII, quo $\mu = 3$ et $\nu = 1$.

Hoc ergo caſu erit

$$M = \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{n+p+1} - \frac{2}{n+p+2} + \frac{1}{n+p+3} \right)$$

hincque

$$\int M \partial p = \tfrac{1}{2} l \frac{n+p+1}{n+1} - \tfrac{2}{2} l \frac{n+p+2}{n+2} + \tfrac{1}{2} l \frac{n+p+3}{n+3};$$

at pro R habetur adhuc valor praecedens $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{l x}$. Quare cum per propoſitionem ſupra allatam ſit

$$\int \partial x \int \partial x \int R \partial x = \int \frac{R \partial x (1-x)^2}{1.2},$$

habebimus per ſimplex ſignum ſummatorium

$$\int \frac{(1-x)^2 (x^{n+p} - x^n)}{l x} \partial x = l \frac{n+p+1}{n+1} - 2 l \frac{n+p+2}{n+2} + l \frac{n+p+3}{n+3}.$$

Exemplum VIII, quo $\mu = 4$ et $\nu = 1$.

Hoc caſu erit

$$M = \tfrac{1}{6} \left(\frac{1}{n+p+1} - \frac{3}{n+p+2} + \frac{3}{n+p+3} - \frac{1}{n+p+4} \right)$$

hincque

$$\int M \partial p = \tfrac{1}{6} l \frac{n+p+1}{n+1} - \tfrac{3}{6} l \frac{n+p+2}{n+2} + \tfrac{3}{6} l \frac{n+p+3}{n+3} - \tfrac{1}{6} l \frac{n+p+4}{n+4}.$$

Deinde cum vt ante ſit $R = \frac{x^{n+p} - x^n}{l x}$, ob

$\int \partial x \int \partial x \int \partial x \int R \partial x = \tfrac{1}{6} \int R \partial x (1-x)^3$, erit

$$\int \frac{(1-x)^3(x^{n+p}-x^n)}{lx}\partial x = l\frac{n+p+1}{n+1} - 3\,l\frac{n+p+2}{n+2} + 3\,l\frac{n+p+3}{n+3} - l\frac{n+p+4}{n+4}.$$

Superfluum autem foret indici μ maiores valores tribuere, cum facta euolutione formulae $(1-x)^{\mu-1}$ ex exemplo V^{to} iidem valores eſſent prodituri.

Exemplum IX, quo $\mu = 1$ et $\nu = 2$.

Hoc ergo caſu erit $M = \frac{1}{n+p+1}$, hincque

$$\int M\partial p = l\frac{n+p+1}{n+1} \text{ et } \int\partial p\int M\partial p = (n+p+1)\,l\frac{n+p+1}{n+1} - p.$$

Facilius autem hic valor reperitur ope reductionis generalis

$$\int\partial p\int M\,\partial p = p\int M\,\partial p - \int M\,p\,\partial p;$$

namque ob $M = \frac{1}{n+p+1}$ erit $\int M\,\partial p = l\,\frac{n+p+1}{n+1}$, deinde vero ob $M\,p = \frac{p}{n+p+1} = 1 - \frac{n+1}{n+p+1}$, erit

$$\int M\,p\,\partial p = p - (n+1)\,l\,\frac{n+p+1}{n+1},$$

vnde colligitur

$$\int\partial p\int M\,\partial p = p\,l\,\frac{n+p+1}{n+1} + (n+1)\,l\,\frac{n+p+1}{n+1} - p,$$

vt ante. Tum vero erit

$$R = \frac{x^{n+p}}{(lx)^2} - x^n\left(\frac{1}{(lx)^2} + \frac{p}{lx}\right);$$

hinc cum ſit $\int R\,\partial x = \int\partial p\int M\,\partial p$, erit

$$\int\frac{x^{n+p}}{(lx)^2}\partial x - \int x^n\left(\frac{1}{(lx)^2} + \frac{p}{lx}\right)\partial x = (n+p+1)\,l\frac{n+p+1}{n+1} - p.$$

Exemplum X, quo $\mu = 2$ et $\nu = 2$.

Hoc ergo caſu erit $M = \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p+2}$ hincque

$$\int M\,\partial p = l\,\frac{n+p+1}{n+1} - l\,\frac{n+p+2}{n+2},$$

et

et ob ſuperiorem reductionem hinc ſit

$$M\,p = \frac{p}{n+p+1} - \frac{p}{n+p+2} = -\frac{n+1}{n+p+1} + \frac{n+2}{n+p+2},$$

ideoque

$$\int M\,p\,\partial p = -(n+1)\,l\,\frac{n+p+1}{n+1} + (n+2)\,l\,\frac{n+p+2}{n+2},$$

ita vt iam ſit

$$\int \partial p \int M\,\partial p = p\,l\,\frac{n+p+1}{n+1} - p\,l\,\frac{n+p+2}{n+2}$$
$$+ (n+1)\,l\,\frac{n+p+1}{n+1} - (n+2)\,l\,\frac{n+p+2}{n+2};$$

quare cum ſit $\int \partial x \int R\,\partial x = \int \partial p \int M\,\partial p$, ob

$$\int \partial x \int R\,\partial x = \int R\,\partial x - \int R\,x\,\partial x,$$

aequatio hinc oriunda fiet

$$\int \frac{(1-x)\,x^{n+p}\,\partial x}{(l\,x)^2} - \int (1-x)\,x^n \left(\frac{1}{(l\,x)^2} + \frac{p}{l\,x}\right)\partial x$$
$$= (n+p+1)\,l\,\frac{n+p+1}{n+1} - (n+p+2)\,l\,\frac{n+p+2}{n+2}.$$

Exemplum XI, quo $\mu = 3$ et $\nu = 2$.

Hoc ergo caſu eſt

$$M = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{n+p+1} - \frac{2}{n+p+2} + \frac{1}{n+p+3}\right), \text{ hinc}$$

$$\int M\,\partial p = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{n+p+1}{n+1} - \tfrac{2}{2}\,l\,\frac{n+p+2}{n+2} + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{n+p+3}{n+3};$$

tum vero

$$M\,p = -\frac{\frac{1}{2}(n+1)}{n+p+1} + \frac{\frac{2}{2}(n+2)}{n+p+2} - \frac{\frac{1}{2}(n+3)}{n+p+3},$$

ideoque

$$\int M\,p\,\partial p = -\tfrac{1}{2}(n+1)\,l\,\frac{n+p+1}{n+1} + \tfrac{2}{2}(n+2)\,l\,\frac{n+p+2}{n+2}$$
$$- \tfrac{1}{2}(n+3)\,l\,\frac{n+p+3}{n+3};$$

conſequenter

$$\int \partial p \int M \partial p = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{2}(n+p+1)\, l\, \frac{n+p+1}{n+1} \\ - \frac{2}{2}(n+p+2)\, l\, \frac{n+p+2}{n+2} \\ + \frac{1}{2}(n+p+3)\, l\, \frac{n+p+3}{n+3} \end{array} \right\}.$$

Deinde vero manente R vt ante, quoniam ſumto $x = 1$ in genere eſt

$$\int \partial x \int \partial x \int R \partial x = \tfrac{1}{2} \int R \partial x (1 - x)^2,$$

hinc reſultabit ſequens aequatio:

$$\int \frac{(1-x)^2 x^{n+p} \partial x}{(l x)^2} - \int (1-x)^2 x^n \left(\frac{1}{(l x)^2} + \frac{p}{l x} \right) \partial x$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + (n+p+1)\, l\, \frac{n+p+1}{n+1} \\ - (n+p+2)\, l\, \frac{n+p+2}{n+1} \\ + (n+p+3)\, l\, \frac{n+p+2}{n+3} \end{array} \right\}.$$

Exemplum XII, quo $\mu = 1$ et $\nu = 3$.

Hoc igitur caſu erit $M = \frac{1}{n+p+1}$, et quia in genere eſt

$$\int \partial p \int \partial p \int M \partial p = \tfrac{1}{2} p p \int M \partial p - \tfrac{2}{2} p \int M p \partial p + \tfrac{1}{2} \int M p p \partial p,$$

habebimus: $\int M \partial p = l\, \frac{n+p+1}{n+1}$,

$$\int M p \partial p = p - (n+1)\, l\, \frac{n+p+1}{n+1} \text{ et}$$

$$\int M p p \partial p = \tfrac{1}{2} p p - (n+1) p + (n+1)^2\, l\, \frac{n+p+}{n+1},$$

ex his colligitur

$$\int \partial p \int \partial p \int M \partial p = \tfrac{1}{2} (n+p+1)^2\, l\, \frac{n+p+1}{n+1} + \tfrac{3}{4} p p - \tfrac{1}{2}(n+1) p.$$

Deinde erit hic

$$R = \frac{x^{n+p}}{(l x)^3} - x^n \left(\frac{1}{(l x)^3} + \frac{p}{(l x)^2} + \frac{p p}{2 l x} \right).$$

Hinc

Hinc igitur reſultat ſequens aequatio:

$$\int \frac{x^{n+p}\,\partial x}{(l\,x)} - \int x^n \left(\frac{1}{(l\,x)^3} + \frac{p}{(l\,x)^2} + \frac{pp}{2\,l\,x}\right)\partial x =$$

$$\tfrac{1}{2}(n+p+1)^2\, l\,\frac{n+p+1}{n+1} + \tfrac{3}{4}pp - \tfrac{1}{2}(n+1)\,p.$$

Exemplum XIII, quo $\mu = 2$ et $\nu = 3$.

Cum hoc caſu ſit $M = \frac{1}{n+p+1} - \frac{1}{n+p+2}$, ob

$$\int \partial p \int \partial p \int M\,\partial p = \tfrac{1}{2}pp\int M\,\partial p - \tfrac{2}{2}p\int M\,p\,\partial p + \tfrac{1}{2}\int M\,pp\,\partial p,$$

quaeratur

$$\int M\,\partial p = l\,\tfrac{n+p+1}{n+1} - l\,\tfrac{n+p+2}{n+2}.$$

Porro ob $M\,p = -\frac{n+1}{n+p+1} + \frac{n+2}{n+p+2}$, erit

$$\int M\,p\,\partial p = -(n+1)\,l\,\tfrac{n+p+1}{n+1} + (n+2)\,l\,\tfrac{n+p+2}{n+2} \text{ et}$$

$$\int M\,p\,p\,\partial p = -(n+1)\,p + (n+1)^2\,l\,\tfrac{n+p+1}{n+1}$$
$$+ (n+2)\,p - (n+2)^2\,l\,\tfrac{n+p+2}{n+2},$$

vnde fit

$$\int p\,\partial\int p\,\partial\int M\,\partial p = \tfrac{1}{2}(n+p+1)^2\,l\,\tfrac{n+p+1}{n+1}$$
$$- \tfrac{1}{2}(n+p+2)^2\,l\,\tfrac{n+p+2}{n+2} + \tfrac{1}{2}p.$$

Deinde manente R vt ſupra erit $\int \partial x \int R\,\partial x = \int R\,\partial x\,(1-x)$, vnde colligimus:

$$\int \frac{(1-x)\,x^{n+p}\,\partial x}{(l\,x)^3} - \int (1-x)\,x^n\left(\frac{1}{(l\,x)^3} + \frac{p}{(l\,x)^2} + \frac{pp}{2\,l\,x}\right)\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}(n+p+1)^2\,l\,\tfrac{n+p+1}{n+1} - \tfrac{1}{2}(n+p+2)^2\,l\,\tfrac{n+p+2}{n+2} + \tfrac{1}{2}p.$$

Scholion.

Ad illuſtranda haec problemata loco V alia functione determinata, praeter $V = x^{n+p}$, vti non licuit, propterea quod alia huiusmodi forma non conſtat, cuius omnium ordinum integralia ex variabilitate ipſius x oriunda re ipſa exhiberi eorumque valores caſu $x = 1$ dari queant. Hic enim ob nullum plane vſum memorabilem reiic conuenit tales formas: $V = X + P$ et $V = XP$, vbi X ſignificaret functionem ipſius X tantum, P vero ipſius p tantum. Sin autem in vnica integratione ex ſola variabili x nata acquieſcere velimus, praeter formulam hactenus tractatam x^{n+p} etiam duae ſequentes in vſum vocari poſſunt:

$$V = \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1}}{1 + x^{2n}} \text{ et } V = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1}}{1 - x^{2n}},$$

quandoquidem oſtendi, vtroque caſu valorem integralis $\frac{\int}{x} V$ ſiue $\int V \partial x$, caſu quo ponitur $x = 1$, admodum commode per functionem ſolius p exprimi poſſe, poſtquam ſcilicet integrale ita fuerit ſumtum, vt euaneſcat poſito $x = 0$. Iam dudum enim demonſtraui (*) ſub his conditionibus fore

$$\text{I. } \int \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1}}{1 + x^{2n}} \partial x = \frac{\pi}{2n \operatorname{coſ.} \frac{\pi p}{2n}}.$$

$$\text{II. } \int \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1}}{1 - x^{2n}} \partial x = -\frac{\pi}{2n} \operatorname{tang.} \frac{\pi p}{2n}.$$

Quamobrem operae pretium erit bina problemata II et IV. etiam per has formulas illuſtrare. Ex vtroque ſcilicet problemate, ſumto indice $\mu = 1$, primo deduximus $Q = \frac{\int}{x} V$, tum vero poſito $x = 1$ fecimus $Q = M$, vnde caſu formulae prioris

(*) Videatur Diſſertatio Ill. Euleri: *De valore formulae integralis*

$$\int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1 + z^{2n}} \partial z,$$

caſu quo poſt integrationem ponitur $z = 1$. Nouor. Comment. T. XIX.

ris perpetuo erit $M = \frac{\pi}{2n \operatorname{coſ}. \frac{\pi p}{2n}}$, caſu poſterioris formulae $M = -\frac{\pi}{2n} \operatorname{tang}. \frac{\pi p}{2n}$. Pro altera autem littera R in problemate ſecundo erat $R = \frac{\partial^\nu}{p} V$, vnde pro formula prima caſu $\nu = 1$ erit $R = \frac{(x^{n+p-1} - x^{n-p-1})}{1 + x^{2n}} lx$, et pro poſteriore

$$R = \frac{(x^{n+p-1} + x^{n-p-1})}{1 - x^{2n}} lx.$$

Deinde vero ſumto $\nu = 2$, erit pro priore formula:

$$R = \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1})}{1 + x^{2n}} (lx)^2$$ et pro poſteriore

$$R = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1}}{1 - x^{2n}} (lx)^2.$$

Simili modo ſumto $\nu = 3$ erit pro priore formula:

$$R = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1}}{1 + x^{2n}} (lx)^3;$$ pro poſteriore vero

$$R = \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1}}{1 - x^{2n}} (lx)^3.$$

Atque adeo in genere pro omni indice ν erit pro priore forma:

$$R = \frac{x^{n+p-1} \pm x^{n-p-1}}{1 + x^{2n}} (lx)^\nu,$$ pro poſteriore vero

$$R = \frac{x^{n+p-1} \mp x^{n-p-1}}{1 - x^{2n}} (lx)^\nu.$$

Vbi ſigna ſuperiora valent ſi ν numerus par, inferiora vero ſi impar.

Pro quarto autem problemate, vbi quantitas R per integrationes definiri debet, cum ſit $R = \frac{\int^\nu}{p} V$, reperimus, ſumto

to $\nu = 1$, pro priore formula

$$R = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1}}{(1 + x^{2n})\, l\, x},$$

pro poſteriore vero formula reperitur

$$R = \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1} - 2\, x^{n-1}}{(1 - x^{2n})\, l\, x}.$$

Sumto autem $\nu = 2$ habebimus pro formula priore

$$R = \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1} - 2\, x^{n-1}}{(1 + x^{2n})\, (l\, x)^2},$$ pro poſteriore vero

$$R = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1}}{(1 - x^{2n})\, (l\, x)^2} - \frac{2\, x^{n-1}\, p}{(1 - x^{2n})\, l\, x}$$ ſiue

$$R = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1} - 2\, x^{n-1} \,.\, p\, l\, x}{(1 - x^{2n})\, (l\, x)^2}.$$

Deinde vero ſumto $\nu = 3$, erit pro priore formula

$$R = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1} - 2\, p\, x^{n-1}\, l\, x}{(1 + x^{2n})\, (l\, x)^3}$$

et pro poſteriore formula:

$$R = \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1} - p^2\, x^{n-1}\, (l\, x)^2}{(1 + x^{2n})\, (l\, x)^3}.$$

Sumatur porro $\nu = 4$, ac reperiemus pro formula priore

$$R = \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1} - 2\, x^{n-1} - p\, p\, x^{n-1}\, (l\, x)^2}{(1 + x^{2n})\, (l\, x)^4},$$

pro poſteriore vero

$$R = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1} - 2\, p\, x^{n-1}\, l\, x - \tfrac{1}{3}\, p^3\, x^{n-1}\, (l\, x)^3}{(1 - x^{2n})\, (l\, x)^4}.$$

Sumatur porro $\nu = 5$ ac habebimus pro priore formula:

R =

$$R = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1} - 2p\,x^{n-1}\,lx - \frac{1}{3}p^3 x^{n-1}(lx)^3}{(1 + x^{2n})(lx)^5} \text{ et}$$

$$R = \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1} - 2x^{n-1} - pp\,x^{n-1}(lx)^2 - \frac{1}{12}p^4 x^{n-1}(lx)^4}{(1 - x^{2n})(lx)^5}.$$

Sit $\nu = 6$, eritque

$$R = \frac{x^{n+p-1} + x^{n-p-1} - 2x^{n-1}(1 + \frac{1}{2}p(lx)^2 + \frac{1}{24}p^4(lx)^4)}{(1 + x^{2n})(lx)^6};$$

$$R = \frac{x^{n+p-1} - x^{n-p-1} - 2x^{n-1}(p\,lx + \frac{1}{6}p^3(lx)^3 + \frac{1}{120}p^5(lx)^5)}{(1 - x^{2n})(lx)^6},$$

et hinc lex iam ſatis elucet, qua ſequentes valores progrediuntur.

CONSIDERATIO AEQVATIONIS

$$\int \frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x} = \frac{\pi}{2n} \text{ ſec. } \frac{\pi p}{2n}.$$

Quod ſi hic breuitatis gratia ponamus $M = \frac{\pi}{2n}$ ſec. $\frac{\pi p}{2n}$, primo caſu $x = 1$, ex problemate ſecundo deriuantur ſequentes aequalitates:

$$\text{I. } \int \frac{x^{n+p} - x^{n-p}}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x}\, lx = \frac{\partial M}{\partial p},$$

$$\text{II. } \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x}\, (lx)^2 = \frac{\partial\partial M}{\partial p^2},$$

$$\text{III. } \int \frac{x^{n+p} - x^{n-p}}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x}\, (lx)^3 = \frac{\partial^3 M}{\partial p^3},$$

$$\text{IV. } \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x}\, (lx)^4 = \frac{\partial^4 M}{\partial p^4}.$$

etc.

At vero ex problemate quarto prodeunt ſequentes aequalitates:

$$\text{I. } \int \frac{x^{n+p} - x^{n-p}}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x\, l\, x} = \int M \partial p,$$

$$\text{II. } \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p} - 2x^n}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial p}{x\,(l\,x)^2} = \int \partial p \int M \partial p,$$

$$\text{III. } \int \frac{x^{n+p} - x^{n-p} - 2x^n \cdot p\,l\,x}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^3} = \int \partial p \int \partial p \int M \partial p,$$

$$\text{IV. } \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p} - 2x^n(1 + \frac{1}{2}pp(l\,x)^2)}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^4}$$
$$= \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int M \partial p,$$

$$\text{V. } \int \frac{x^{n+p} - x^{n-p} - 2x^n(p\,l\,x + \frac{1}{6}p^3(l\,x)^3)}{1 + x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^5}$$
$$= \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int M \partial p$$

$$\text{VI. } \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p} - 2x^n(1 + \frac{1}{2}p^2(l\,x)^2 + \frac{1}{24}p^4(l\,x)^4)}{1 + x^{2n}}$$
$$= \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int M \partial p.$$

etc.

CONSIDERATIO AEQVATIONIS

$$\int \frac{x^{n+p} - x^{n-p}}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x} = -\frac{\pi}{2n} \text{ tang. } \frac{\pi p}{2n}.$$

Ponamus hic diſtinctionis gratia $N = -\frac{\pi}{2n}$ tang. $\frac{\pi p}{2n}$, atque ex problemate ſecundo naſcuntur ſequentes aequalitates:

$$\text{I. } \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x} \cdot l\,x = +\frac{\partial N}{\partial p};$$

$$\text{II. } \int \frac{x^{n+p} - x^{n-p}}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x}(l\,x)^2 = \frac{\partial \partial N}{\partial p^2};$$

III.

$$\text{III.} \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x} (l\,x)^3 = \frac{\partial^3 N}{\partial p^3};$$

$$\text{IV.} \int \frac{x^{n+p} - x^{n-p}}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x} (l\,x)^4 = \frac{\partial^4 N}{\partial p^4};$$

etc.

Verum ex theoremate quarto ſequentes reſultant aequalitates:

$$\text{I.} \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p} - 2x^n}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x\,l\,x} = \int N\,\partial p;$$

$$\text{II.} \int \frac{x^{n+p} - x^{n-p} - 2x^n \,.\, p\,l\,x}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x(l\,x)^2} = \int \partial p \int N\,\partial p;$$

$$\text{III.} \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p} - 2x^n (1 + \frac{1}{2} p\,p\,(l\,x)^2)}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x(l\,x)^3}$$
$$= \int \partial p \int \partial p \int N\,\partial p;$$

$$\text{IV.} \int \frac{x^{n+p} - x^{n-p} - 2x^n (p\,l\,x + \frac{1}{6} p^3 (l\,x)^3)}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x(l\,x)^4}$$
$$= \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int N\,\partial p;$$

$$\text{V.} \int \frac{x^{n+p} + x^{n-p} - 2x^n (1 + \frac{1}{2} p\,p\,(l\,x)^2 + \frac{1}{24} p^4 (l\,x)^4)}{1 - x^{2n}} \cdot \frac{\partial x}{x(l\,x)^5}$$
$$= \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int N\,\partial p.$$

In his ſcilicet formulis quantitates M et N ſpectantur vt fractiones ipſius p, atque ex eius variabilitate tam differentiantur quam integrantur.

Ex his igitur abunde intelligitur, omnia quae ſuper hoc argumento a me non ita pridem ſunt prolata, tanquam caſus valde particulares in praeſenti tractatione contineri.

Scholion.

Formulae autem iſtae ſequenti modo ſuccinctius exhiberi poſſunt, ad quas intelligendas notetur in formulis ad ſiniſtram poſitis valores integralium eſſe extendendas ab $x = 0$ ad $x = 1$, in formulis autem ad dextram poſitis quantitatem p ſpectari vt variabilem et integralia ita capi, vt euaneſcant poſito $p = 0$; tum vero loco $\frac{\pi}{2}$ hic litteram ϱ ſcribi, ita vt ϱ ſit character anguli recti. His igitur praenotatis ex integrali priori:

$$\int \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}} \frac{\partial x}{x} = \frac{\varrho}{n} \text{ ſec. } \frac{p\varrho}{n},$$

per differentiationem ſequentia deducuntur:

$$\text{I. } \int \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x}\, l\, x = \frac{\varrho}{n\, \partial p} \partial \,.\text{ ſec. } \frac{p\varrho}{n},$$

$$\text{II. } \int \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x} (l\, x)^2 = \frac{\varrho}{n\, \partial p^2} \partial\partial \,.\text{ ſec. } \frac{p\varrho}{n},$$

$$\text{III. } \int \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x} (l\, x)^3 = \frac{\varrho}{n\, \partial p^3} \partial^3 \,.\text{ ſec. } \frac{p\varrho}{n},$$

$$\text{IV. } \int \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x} (l\, x)^4 = \frac{\varrho}{n\, \partial p^4} \partial^4 \,.\text{ ſec. } \frac{p\varrho}{n},$$

per integrationem vero ſequentes aequalitates oriuntur:

$$\text{I. } \int \frac{x^p - x^{-p}}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x\, l\, x} = \frac{\varrho}{n} \int \partial p \text{ ſec. } \frac{p\varrho}{n},$$

$$\text{II. } \int \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l x)^2} = \frac{\varrho}{n} \int \partial p \int \partial p \text{ ſec. } \frac{p\varrho}{\varrho},$$

$$\text{III. } \int \frac{x^p - x^{-p} - 2p\, l\, x}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x\, (l x)^3} = \frac{\varrho}{n} \int \partial p \int \partial p \int \partial p \text{ ſec. } \frac{p\varrho}{n},$$

IV.

IV. $\int \frac{x^p + x^{-p} - 2(1 + \frac{1}{2} p^2 (l x)^2}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x (l x)^4}$
$$= \frac{\varrho}{n} \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \text{ ſec.} \frac{p \varrho}{n},$$

V. $\int \frac{x^p - x^{-p} - 2(p\, l x + \frac{1}{6} p^3 (l x)^3)}{x^n + x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x (l x)^5}$
$$= \frac{\varrho}{n} \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \text{ ſec.} \frac{p \varrho}{n}.$$

etc.

Ex altera autem formula integrali principali:
$$\int \frac{x^p - x^{-p}}{x^n - x^{-n}} = \frac{\varrho}{n} \text{ tang.} \frac{p \varrho}{n},$$
per differentiationem naſcuntur ſequentes aequationes:

I. $\int \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x} l x = \frac{\varrho}{n} \partial \text{. tang.} \frac{p \varrho}{n},$

II. $\int \frac{x^p - x^{-p}}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x} (l x)^2 = \frac{\varrho}{n} \partial \partial \text{. tang.} \frac{p \varrho}{n},$

III. $\int \frac{x^n + x^{-p}}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x} (l x)^3 = \frac{\varrho}{n} \partial^3 \text{. tang.} \frac{p \varrho}{n},$

IV. $\int \frac{x^p - x^{-p}}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x} (l x)^4 = \frac{\varrho}{n} \partial^4 \text{. tang.} \frac{p \varrho}{n},$

etc.

per differentiationem vero colliguntur ſequentes:

I. $\int \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x (l x)} = \frac{\varrho}{n} \int \partial p \text{ tang.} \frac{p \varrho}{n},$

II. $\int \frac{x^p - x^{-p} - 2 p\, l x}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x (l x)^2} = \frac{\varrho}{n} \int \partial p \int \partial p \text{ tang.} \frac{p \varrho}{n},$

III. $\int \frac{x^p + x^{-p} - 2(1 + \frac{1}{2} p^2 (l\,x)^2)}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^3}$

$$= \frac{\varrho}{n} \int \partial p \int \partial p \int \partial p \text{ tang. } \frac{p\,\varrho}{n},$$

IV. $\int \frac{x^p - x^{-p} - 2(p\,l\,x + \frac{1}{6} p^3 (l\,x)^3)}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x\,(l\,x)^4}$

$$= \frac{\varrho}{n} \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \text{ tang. } \frac{p\,\varrho}{n},$$

V. $\int \frac{x^p + x^{-p} - 2(1 + \frac{1}{2} p^2 (l\,x)^2 + \frac{1}{24} p^4 (l\,x)^4)}{x^n - x^{-n}} \cdot \frac{\partial x}{x(l\,x)^5}$

$$= \frac{\varrho}{n} \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \int \partial p \text{ tang. } \frac{p\,\varrho}{n}.$$

Denique circa omnes has integrationes notari operae erit pretium, ſi integralia ad ſiniſtram poſita a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extendantur, tum eorum valores duplo fieri maiores.

ANALY-

ANALYSIS FACILIS ET PLANA AD EAS SERIES MAXIME ABSTRVSAS PERDVCENS, QVIBVS OMNIVM AEQVATIONVM ALGEBRAICARVM NON SOLVM RADICES IPSAE, SED ETIAM QVAEVIS EARVM POTESTATES EXPRIMI POSSVNT.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 15 *April.* 1776.

Problema.

Propoſita aequatione algebraica tribus terminis conſtante, quam ſemper hac forma repraeſentare licet: $1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}$, inuenire ſeriem, quae exprimat valorem ipſius x^n.

Solutio.

§. 1. Haec aequatio, ponendo $x = A^{\frac{1}{\alpha}} Z$, ſemper ad hanc formam ſimpliciorem reuocari poteſt: $1 = \frac{1}{Z^\alpha} + \frac{B}{A^{\frac{\beta}{\alpha}} Z^\beta}$, vnde ponendo $B = A^{\frac{\beta}{\alpha}} C$, erit $1 = \frac{1}{Z^\alpha} + \frac{C}{Z^\beta}$, quae per Z^n mul-

multiplicata praebet $Z^n = Z^{n-\alpha} + C Z^{n-\beta}$; hinc igitur quaeri oportet valorem poteſtatis Z^n, quandoquidem hinc erit $x^n = A^{\frac{n}{\alpha}} Z^n$. Manifeſtum autem eſt valorem ipſius Z^n exprimi debere per ſeriem, in quam exponens n ingrediatur quam ergo ſpectare licebit tanquam functionem ipſius n, et quia haec ſeries ex infinitis terminis conſtabit, eam ita repraeſentemus:

$$Z^n = f^\circ : n + f' : n + f'' : n + f''' : n + f'''' : n + \text{etc.}$$

quae ergo forma ita debet eſſe comparata, vt poſito $n = 0$ fiat $Z^n = 1$; vnde patet ſtatui debere $f^\circ : n = 1$, reliquos vero terminos factorem habere debere n, vt euaneſcant poſito $n = 0$, prodeatque $x^\circ = 1$.

§. 2. Conſtituta hac ſerie, ſi loco n ſcribamus $n - \alpha$, habebimus:

$$Z^{n-\alpha} = f^\circ : (n-\alpha) + f' : (n-\alpha) + f'' : (n-\alpha) + f''' : (n-\alpha) + \text{etc.}$$

ſimilique modo erit

$$Z^{n-\beta} = f^\circ : (n-\beta) + f' : (n-\beta) + f'' : (n-\beta) + \text{etc.}$$

vbi iterum notetur eſſe $f^\circ : (n - \alpha) = 1$ et $f^\circ : (n - \beta) = 1$. Cum iam noſtra aequatio ſit $Z^n - Z^{n-\alpha} = C Z^{n-\beta}$, ſcribamus loco poteſtatum ipſius Z ſeries aſſumtas ſequenti modo:

$$\begin{array}{l} + Z^n = + f^\circ : n \quad + f' : n \quad + f'' : n \quad + f''' : n + \text{etc.} \\ - Z^{n-\alpha} = - f^\circ : (n-\alpha) - f' : (n-\alpha) - f'' : (n-\alpha) - f''' : (n-\alpha) - \text{etc.} \\ \hline = C Z^{n-\beta} = C f^\circ : (n-\beta) + C f' : (n-\beta) + C f'' : (n-\beta) + C f''' : (n-\beta) + \text{etc.} \end{array}$$

nunc functiones iſtae indefinitae ita determinentur, vt fiat

$$\text{I. } f' : n - f' : (n - \alpha) = C f^\circ : (n - \beta) = C,$$

$$\text{II. } f' : n - f'' : (n - \alpha) = C f' : (n - \beta);$$

III.

III. $f''' : n - f''' : (n - \alpha) = C f'' : (n - \beta)$;
IV. $f'''' : n - f'''' : (n - \alpha) = C f''' : (n - \beta)$.
etc. etc.

§. 3. Ope harum aequationum ergo primo quaeri debet natura functionis $f' : n$, vt primae aequationi ſatisfiat; qua inuenta innoteſcet functio $f' : (n - \beta)$, ex eaque per ſecundam aequationem quaeri debet indoles functionis $f'' : n$, vnde innoteſcet functio $f'' : (n - \beta)$, hincque porro ſimili modo ex aequatione tertia deducetur indoles functionis $f''' : n$, et ita porro, donec lex pateat, qua ſingulae hae functiones vlterius progrediuntur: vnde patet reſolutionem omnium harum aequationum reuocari ad hanc quaeſtionem, qua propoſita functione ipſius n quaeritur alia functio, veluti $\Phi : n$, vt fiat $\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = N$, quem in finem ſequentia Lemmata euoluamus.

Lemma I.

§. 4. Si fuerit $\Phi : n = \Delta n$, erit $\Phi : (n - \alpha) = \Delta (n - \alpha)$, ideoque $\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = \Delta \alpha$; vnde viciſſim, ſi ponatur $\Delta \alpha = k$, vt fieri debeat $\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = k$, reperietur $\Phi : n = \frac{k n}{\alpha}$. Quare cum ex prima aequatione eſſe debeat $f' : n - f' : (n - \alpha) = C$, neceſſe eſt vt ſit $f' : n = \frac{C n}{\alpha}$, vnde pro ſecunda aequatione fiet $f' : (n - \beta) = \frac{C}{\alpha} (n - \beta)$.

Lemma II.

§. 5. Si fuerit $\Phi : n = \Delta n (n + \alpha - v)$, erit

$\Phi : (n - \alpha) = \Delta (n - \alpha)(n - v)$, vnde colligitur

$\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = 2 \Delta \alpha (n - \frac{1}{2} v)$.

Quodſi ergo prodire debeat

$\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = k (n - \lambda)$,

ob $\Delta = \frac{k}{2\alpha}$ et $v = 2\lambda$, erit

$$\phi : n = \frac{kn}{2\alpha}(n + \alpha - 2\lambda).$$

Quare cum aequatio ſecunda iam ſit

$$f'' : n - f'' : (n - \alpha) = C f' : (n - \beta) = \frac{cc}{\alpha}(n - \beta),$$

ob $k = \frac{cc}{\alpha}$ et $\lambda = \beta$ erit

$$f'' : n = \frac{cc}{2\alpha\alpha}\, n\, (n + \alpha - 2\beta),$$

vnde pro tertia aequatione fiet

$$f'' : (n - \beta) = \frac{cc}{2\alpha\alpha}(n - \beta)(n + \alpha - 3\beta).$$

Lemma III.

§. 6. Si fuerit

$$\phi : n = \Delta\, n\, (n + \alpha - v)(n + 2\alpha - v), \text{ erit}$$

$$\phi : (n - \alpha) = \Delta\, (n - \alpha)(n - v)(n + \alpha - v),$$

hinc ergo fit

$$\phi : n - \phi : (n - \alpha) = 3\Delta\alpha\, (n + \alpha - v)(n - \tfrac{1}{3}v),$$

vnde viciſſim, poſito $3\Delta\alpha = k$ et $\frac{1}{3}v = \lambda$, vt prodeat

$k(n + \alpha - 3\lambda)(n - \lambda)$, ſumi debet

$$\phi : n = \frac{kn}{3\alpha}(n + \alpha - 3\lambda)(n + 2\alpha - 3\lambda).$$

Quia nunc pro noſtra aequatione tertia fieri debet

$$f''' : n - f''' : (n - \alpha) = \frac{c^3}{2\alpha\alpha}(n - \beta)(n + \alpha - 3\beta),$$

facta applicatione fiet $k = \frac{c^3}{2\alpha\alpha}$ et $\lambda = \beta$, hincque concluditur fore

$$f''' : n = \frac{c^3}{6\alpha^3} \cdot n\, (n + \alpha - 3\beta)(n + 2\alpha - 3\beta),$$

vnde pro aequatione ſequente habebimus:

$$f''' : (n - \beta) = \frac{c^3}{6\alpha^3}(n - \beta)(n + \alpha + 4\beta)(n + 2\alpha - 4\beta).$$

Lem-

Lemma IV.

§. 7. Si fuerit

$$\Phi : n = \Delta\, n\, (n + \alpha - v)\, (n + 2\,\alpha - v)\, (n + 3\,\alpha - v),\ \text{erit}$$

$$\Phi : (n - \alpha) = \Delta\, (n - \alpha)\, (n - v)\, (n + \alpha - v)\, (n + 2\alpha - v),$$

hincque

$$\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = 4\,\Delta\,\alpha\, (n + \alpha - v)\, (n + 2\,\alpha - v)\, (n - \tfrac{1}{4}v).$$

Quare ſi debeat eſſe

$$\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = k\, (n - \lambda)\, (n + \alpha - 4\lambda)\, (n + - 2\,\alpha - 4\,\lambda),$$

ſumi debet $\Delta = \frac{k}{4\,\alpha}$ et $v = 4\,\lambda$, hincque fiet

$$\Phi : n = \frac{k\,n}{4\,\alpha}\, (n + \alpha - 4\,\lambda)\, (n + 2\,\alpha - 4\,\lambda)\, (n + 3\,\alpha - 4\,\lambda).$$

Quare cum aequatio noſtra quarta ſit

$$f'''' : n - f'''' : (n - \alpha) = \frac{c^4}{6\,\alpha^3}\, (n - \beta)\, (n + \alpha - 4\,\beta)\, (n + 2\,\alpha - 4\,\beta),$$

facta applicatione fiet $k = \frac{c^4}{6\,\alpha^3}$ et $\lambda = \beta$, hincque concluditur fore

$$f'''' : n = \frac{c^4}{24\,\alpha^4}\, n\, (n + \alpha - 4\,\beta)\, (n + 2\,\alpha - 4\,\beta)\, (n + 3\,\alpha - 4\,\beta),$$

vnde pro quinta aequatione nanciſcemur:

$$f'''' : (n - \beta) = \frac{c^4}{24\,\alpha^4}\, (n - \beta)\, (n + \alpha - 5\,\beta)\, (n + 2\alpha - 5\,\beta)\, (n + 3\,\alpha - 5\,\beta).$$

Lemma V.

§. 8. Si fuerit

$$\Phi : n = \Delta\, n\, (n + \alpha - v)\, (n + 2\alpha - v)\, (n + 3\alpha - v)\, (n + 4\,\alpha - v),$$

erit

$$\Phi : (n - \alpha) = \Delta\, (n - \alpha)\, (n - v)\, (n + \alpha - v)\, (n + 2\alpha - v)\, (n + 3\,\alpha - v),$$

hincque

$$\Phi : n - \Phi : (n - \alpha) = 5\,\Delta\,\alpha\, (n + \alpha - v)\, (n + 2\,\alpha - v)\, (n + 3\,\alpha - v)\, (n - \tfrac{1}{5}v).$$

Quare ſi debeat eſſe

$$\Phi : n - \Phi : (n-\alpha) = k(n-\lambda)(n+\alpha-5\lambda)(n+2\alpha-5\lambda)(n+3\alpha-5\lambda),$$

ſumi debet $\Delta = \frac{k}{5\alpha}$ et $5\lambda = v$, tum vero erit

$$\Phi : n = \frac{k}{5\alpha} n(n+\alpha-5\lambda)(n+2\alpha-5\lambda)(n+3\alpha-5\lambda)(n+4\alpha-5\lambda).$$

Aequatio autem quinta cum ita ſe habeat:

$$f''''' : n - f''''' : (n-\alpha) = \frac{c^5}{24\alpha^4}(n-\beta)(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\alpha-5\beta),$$

hic ſumi debet $k = \frac{c^5}{24\alpha^4}$ et $\lambda = \beta$, vnde concluditur

$$f''''' : n = \frac{c^5}{120\alpha^5} n(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\alpha-5\beta)(n+4\alpha-5\beta).$$

Hinc iam ſine vlteriore calculo concludere licet fore

$$f^{VI} : n = \frac{c^6}{720\alpha^6} n(n+\alpha-6\beta)(n+2\alpha-6\beta)(n+3\alpha-6\beta) \times$$
$$\times (n+4\alpha-6\beta)(n+5\alpha-6\beta) \text{ et}$$

$$f^{VII} : n = \frac{c^7}{5040\alpha^7} n(n+\alpha-7\beta)(n+2\alpha-7\beta)(n+3\alpha-7\beta) \times$$
$$\times (n+4\alpha-7\beta)(n+5\alpha-7\beta)(n+6\alpha-7\beta).$$

Concluſio finalis.

§. 9. His igitur colligendis ſi aequatio propoſita fuerit $1 = \frac{1}{Z^\alpha} + \frac{C}{Z^\beta}$, tum pro poteſtate quacunque ipſius Z ſequens reſultat ſeries:

$$Z^n = 1 + \frac{c}{\alpha} n + \frac{cc}{2\alpha\alpha} n(n+\alpha-2\beta) + \frac{c^3}{6\alpha^3} n(n+\alpha-3\beta)(n+2\alpha-3\beta)$$
$$+ \frac{c^4}{24\alpha^4} n(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)(n+3\alpha-4\beta)$$
$$+ \frac{c^5}{120\alpha^5} n(n+\alpha-5\beta)(n+2\alpha-5\beta)(n+3\beta-5\beta) \times$$
$$\times (n+4\alpha-5\beta) + \text{etc.}$$

Scholion.

§. 10. Haec ſeries, quam eruimus, eo magis eſt notatu digna, quod nulla alia via patet eam inueniendi. Quin etiam

iam Analyſis noſtra ita eſt comparata, vt veritas ſolutionis non ſolum ad omnes exponentes integros n, ſed etiam ad quosuis valores fractos, atque adeo negatiuos extenditur. Praeterea vero etiam ex noſtra ſerie generali logarithmus Hyperbolicus ipſius Z exprimi poteſt. Cum enim ſemper, caſu $n = 0$, ſit

$$\frac{Z^n - 1}{n} = lZ,$$

erit noſtro caſu

$$lZ = \frac{c}{\alpha} + \frac{cc}{2\alpha^2}(\alpha - 2\beta) + \frac{c^3}{6\alpha^3}(\alpha - 3\beta)(2\alpha - 3\beta)$$
$$+ \frac{c^4}{24\alpha^4}(\alpha - 4\beta)(2\alpha - 4\beta)(3\alpha - 4\beta)$$
$$+ \frac{c^5}{120\alpha^5}(\alpha-5\beta)(2\alpha-5\beta)(3\alpha-5\beta(4\alpha-5\beta) + \text{etc.}$$

Vnde ſi tota haec ſeries deſignetur littera Δ, vt ſit $lZ = \Delta$, erit $Z = e^{\Delta}$, ideoque $Z^n = e^{n\Delta}$, quae ergo quantitas aequalis erit ſeriei ſupra inuentae pro Z^n. At vero iſta expreſſio $e^{n\Delta}$ in ſeriem euoluta praebet

$$Z^n = 1 + n\Delta + \tfrac{1}{2}nn\Delta^2 + \tfrac{1}{6}n^3\Delta^3 + \tfrac{1}{24}n^4\Delta^4 + \tfrac{1}{120}n^5\Delta^5 + \text{etc.}$$

quae ergo ſeries ſeriei ſupra inuentae neceſſario erit aequalis, id quod etiam comprobabitur, dum ſaltem priores termini euoluentur. Cum enim ſit

$$\Delta = \frac{c}{\alpha} + \frac{cc}{2\alpha^2}(\alpha - 2\beta) + \text{etc. erit}$$
$$\Delta^2 = \frac{cc}{\alpha^2} + \frac{c^3}{\alpha^3}(\alpha - 2\beta)$$
$$\Delta^3 = \frac{c^3}{\alpha^3},$$

vnde deducimus

$$Z^n = 1 + \frac{c}{\alpha}n + \frac{cc}{2\alpha\alpha}n(\alpha-2\beta) + \frac{c^3}{6\alpha^3}n(\alpha-3\beta)(2\alpha-3\beta) + \text{etc.}$$
$$\frac{cc}{2\alpha\alpha}nn \qquad + \frac{c^3}{2\alpha^3}nn(\alpha - 2\beta) + \text{etc.}$$
$$+ \frac{c^3}{6\alpha^3}n^3 + \text{etc.}$$

ſiue

$$Z^n = 1 + \frac{c}{\alpha} n + \frac{cc}{2\alpha\alpha} n (n + \alpha - 2\beta)$$
$$+ \frac{c^3}{6\alpha^3} (n(\alpha - 3\beta)(2\alpha - 3\beta) + nn(n + 3\alpha - 6\beta);$$

quod cum ſerie pro Z^n ſupra inuenta perfecte congruit.

Theorema generale.

§. 11. Quodſi ergo propoſita fuerit aequatio initio commemorata: $1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}$, quoniam poſuimus $Z = \frac{x}{A^{\frac{1}{\alpha}}}$ et

$C = \frac{B}{A^{\frac{\beta}{\alpha}}}$, erit

$$\frac{x}{A^{\frac{n}{\alpha}}} = 1 + \frac{B}{A^{\frac{\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{n}{\alpha} + \frac{B^2}{A^{\frac{2\beta}{\alpha}}} \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{(n + \alpha - 2\beta)}{2\alpha}$$
$$+ \frac{B^3}{A^{\frac{3\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{(n + \alpha - 3\beta)}{2\alpha} \frac{(n + 2\alpha - 3\beta)}{3\alpha}$$
$$+ \frac{B^4}{A^{\frac{4\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{(n + \alpha - 4\beta)}{2\alpha} \frac{(n + 2\alpha - 4\beta)}{3\alpha} \frac{(n + 3\alpha - 4\beta)}{4\alpha} \text{ etc.}$$

ſiue

$$X^n = A^{\frac{n}{\alpha}} + A^{\frac{n-\beta}{\alpha}} B \frac{n}{\alpha} + A^{\frac{n-2\beta}{\alpha}} B^2 \frac{n}{\alpha} \frac{(n + \alpha - 2\beta)}{2\alpha}$$
$$+ A^{\frac{n-3\beta}{\alpha}} B^3 \frac{n}{\alpha} \frac{(n + \alpha - 3\beta)}{2\alpha} \frac{(n + 2\alpha - 3\beta)}{3\alpha}$$
$$+ A^{\frac{n-4\beta}{\alpha}} B^4 \cdot \frac{n}{\alpha} \frac{(n + \alpha - 4\beta)}{2\alpha} \frac{(n + 2\alpha - 4\beta)}{3\alpha} \frac{(n + 3\alpha - 4\beta)}{4\alpha}$$
$$+ A^{\frac{n-5\beta}{\alpha}} B^5 \cdot \frac{n}{\alpha} \frac{(n + \alpha - 5\beta)}{2\alpha} \frac{(n + 2\alpha - 5\beta)}{3\alpha} \times$$
$$\times \frac{(n + 3\alpha - 5\beta)}{4\alpha} \frac{(n + 4\alpha - 5\beta)}{5\alpha} + \text{ etc.}$$

Vicis-

Viciſſim igitur propoſita hac ſerie, eius ſumma erit $= x^n$, exiſtente x radice huius aequationis: $1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}$, id quod aliquot exemplis illuſtrare liceat.

Exemplum 1.

§. 12. Statuamus $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, vt propoſita ſit iſta aequatio: $1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x}$, vnde fit $x = A + B$, conſequenter $x^n = (A + B)^n$, ſeries autem inuenta hoc caſu nobis dat

$$(A + B)^n = A^n + \tfrac{n}{1} A^{n-1} B + \tfrac{n(n-1)}{1.\ 2.} A^{n-2} B^2$$
$$+ \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.} A^{n-3} B^3 + \text{etc.}$$

quae eſt ipſa euolutio Binomii Newtoniana, quam nunc patet veram eſſe, quicunque numerus pro exponente n accipiatur, ſiue integer, ſiue fractus, ſiue poſitiuus, ſiue negatiuus, ſiue etiam ſurdus; cum in Algebra communi, vbi haec euolutio eſt tractata, exponens n neceſſario ſit integer poſitiuus.

Exemplum 2.

§. 13. Ponamus, vt ante, $\alpha = 1$, at ſumatur $\beta = 0$, ita vt ſit $1 = \frac{A}{x} + B$, vnde fit $x = \frac{A}{1 - B}$, conſequenter

$$x^n = \frac{A^n}{(1 - B)^n} = A^n (1 - B)^{-n},$$

ſeries autem, ad quam ſumus perducti, hoc caſu erit

$$A^n (1 - B)^n = A^n + \tfrac{n}{1} A^n B + \tfrac{n(n+1)}{1.\ 2.} A^n B^2 + \text{etc.}$$

ſiue

$$(1 - B)^n = 1 + \tfrac{n}{1} B + \tfrac{n(n+1)}{1.\ 2.} B^2 + \tfrac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.} B^3 + \text{etc.}$$

quae eſt demonſtratio eiusdem theorematis Newtoniani pro exponentibus negatiuis.

Exem-

Exemplum 3.

§. 14. Sumamus $A = 2a$ et $B = b$, ſitque porro $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, vt noſtra aequatio fiat $1 = \frac{2a}{x} + \frac{b}{xx}$, ſiue $xx = 2ax + b$, vnde fit $x = a + \sqrt{(aa+b)}$, quo valore ſubſtituto ſeries ante inuenta praebebit

$$(a+\sqrt{aa+b})^n = 2^n a^n + \frac{n}{1} 2^{n-2} a^{n-2} b + \frac{n(n-3)}{1.\ 2.} 2^{n-4} a^{n-4} bb$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.} 2^{n-6} a^{n-6} b^3 + \frac{n(n-7)(n-6)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} 2^{n-8} a^{n-8} b^4$$
$$+ \text{etc.}$$

cuius veritas pro caſu, quo $n = 1$, ex euolutione vulgari confirmari poteſt. Sumto enim $n = 1$ erit

$$a + \sqrt{aa+b} = 2a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{2^3 a^3} + \frac{3b^3}{2^4 a^5} - \frac{5b^4}{2^7 a^7} - \frac{7b^5}{2^8 a^9} - \text{etc.}$$

nouimus autem ex reſolutione vulgari eſſe

$$\sqrt{(aa+b)} = a + \frac{b}{2a} - \frac{1.\ 1.}{2.\ 4.}\frac{bb}{a^3} + \frac{1.\ 1.\ 3.}{2.\ 4.\ 6.}\frac{b^3}{a^5} - \frac{1.\ 1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6.\ 8}\frac{b^4}{a^7} + \text{etc.}$$

cui ſi addatur a, ipſa illa ſeries prodit.

Exemplum 4.

§. 15. Sumamus $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, vt ſit $1 = \frac{A}{xx} + \frac{B}{x}$, ſiue $xx = A + Bx$, ideoque $x = \frac{B + \sqrt{(BB + 4A)}}{2}$, loco A autem ſcribamus aa et $2b$ loco B, vt ſit $x = b + \sqrt{(bb+aa)}$, quocirca ſeries inuenta nobis dabit

$$(b + \sqrt{bb+aa})^n = a^n + \frac{n}{2} a^{n-1}.\, 2b + \frac{n}{2}.\frac{n}{4} a^{n-2}.\, 4bb$$
$$+ \frac{n(n-1)(n+1)}{2.\ 4.\ 6.} a^{n-3}.\, 8b^3 + \frac{n}{2}.\frac{(n-2)n}{4\ \ 6}\frac{n+2}{8} a^{n-4}.\, 16b^4 + \text{etc.}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(b + \sqrt{bb+aa})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1}.\frac{n}{2} a^{n-2} bb$$
$$+ \frac{n}{1}.\frac{(n-1)(n+1)}{2.\ 3.} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1}\frac{(n-2)}{2}\frac{n}{3}.\frac{(n+2)}{4} a^{n-4} b^4 \text{ etc.}$$

haec autem forma vlterius reducetur ad hanc:

$(b +$

$$(b + \sqrt{bb + aa})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{nn}{1.2} a^{n-2} bb$$
$$+ \frac{n(nn-1)}{1.\,2\,\,3.} a^{n-3} b^3 + \frac{nn(nn-4)}{1 \ldots 4} a^{n-4} b^4 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1 \ldots\ldots 5} a^{n-5} b^5$$
$$+ \frac{nn(nn-4)(nn-16)}{1 \ldots\ldots 6} a^{n-6} b^6 + \frac{n(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{1 \ldots\ldots 7} a^{n-7} b^7$$
$$+ \text{etc.}$$

Ita ſi ſumamus $n = 1$, habebimus

$$b + \sqrt{bb + aa} = a + b + \frac{1}{1.2} \frac{bb}{a} - \frac{3}{1 \ldots 4} \frac{b^4}{a^3} + \frac{3.15}{1 \ldots 6} \frac{b^6}{a^5} - \text{etc.}$$

nouimus autem eſſe

$$\sqrt{bb + aa} = a + \frac{1}{2} \frac{bb}{a} - \frac{1.1}{2.4} \frac{b^4}{a^3} + \frac{1.1.3}{2.4.6} \frac{b^6}{a^5} - \text{etc.}$$

cui ſi addatur b, ipſa illa ſeries prodit.

Exemplum 5.

§. 16. Sumamus $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, vt noſtra aequatio ſit $1 = \frac{A}{x} + Bx$, vnde ſit $x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4AB}}{2B}$, hinc ergo prodit

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{(1 - 4AB)}}{2B}\right)^n = A^n + \frac{n}{1} A^{n+1} B + \frac{n(n+3)}{1.\,\,2.} A^{n+2} B^2$$
$$+ \frac{n}{1} \frac{(n+4)(n+5)}{2.\,\,3.} A^{n+3} B^3 + \frac{n}{1} \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{2.\,\,3.\,\,4.} A^{n+4} B^4$$
$$+ \frac{n(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)}{1.\,\,2.\,\,3.\,\,4.\,\,5} A^{n+5} B^5 + \text{etc.}$$

Hinc ergo ſi ſumamus $n = 1$, erit

$$\frac{1 \pm \sqrt{(1 - 4AB)}}{2B} = A + A^2 B + \frac{4}{2} A^3 B^2 + \frac{5.6}{2.3} A^4 B^3$$
$$+ \frac{6.7.8}{2.3.4} A^5 B^4 + \frac{7.8.9.10}{2.3.4.5} A^6 B^5 + \text{etc.}$$

Eſt vero

$$\sqrt{(1 - 4AB)} = 1 - 2AB - 2A^2B^2 - 4A^3B^3$$
$$- 2.5\, A^4 B^4 - \text{etc.}$$

quae ſeries ab vnitate ſubtracta et per $2B$ diuiſa praebet ſeriem modo inuentam.

Scholion.

§. 17. Series autem generalis, quam ſupra elicuimus, primum ab acutiſſimo *Lamberto* ex principiis maxime diuerſis eſt inuenta, quam idcirco *Lambertinam* appellare liceat, propterea quod inter egregia huius viri inuenta merito eſt referenda. Methodus autem, qua hic vſi ſumus, ad aequationes multo generaliores extendi poteſt, quando ſcilicet aequatio propoſita quatuor pluresue terminos continet; id quod pro caſu quatuor terminorum oſtendiſſe operae erit pretium.

Problema generalius.

Si propoſita fuerit aequatio algebraica huius formae:

$$1 - \frac{1}{Z^\alpha} = \frac{B}{Z^\beta} + \frac{C}{Z^\gamma},$$

inuenire ſeriem, quae valorem poteſtatis cuiuscunque ipſius Z, puta Z^n exprimat.

Solutio.

§. 18. Multiplicetur aequatio propoſita per Z^n, vt habeatur $Z^n - Z^{n-\alpha} = B\,Z^{n-\beta} + C\,Z^{n-\gamma}$; et poteſtatem quaeſitam Z^n vt ante tanquam functionem ipſius n ſpectare licebit, quae per partes continuo procedentes ita repraeſentetur, vt ſit

$$Z^n = f^\circ : n + f' : n + f'' : n + f''' : n + f'''' : n + \text{etc.}$$

vbi cum ſumto $n = 0$ fieri debeat $Z^n = 1$, ſit perpetuo $f^\circ : n = 1$, tum vero vt reliquae partes caſu $n = 0$ euaneſcant, ſingulas factorem n habere neceſſe eſt. Hinc ergo erit

$$Z^{n-\alpha} = f^\circ : (n-\alpha) + f' : (n-\alpha) + f'' : (n-\alpha) + \text{etc.}$$

$$Z^{n-\beta} = f^\circ : (n-\beta) + f' : (n-\beta) + f'' : (n-\beta) + \text{etc.}$$

$$Z^{n-\gamma} = f^\circ : (n-\gamma) + f' : (n-\gamma) + f'' : (n-\gamma) + \text{etc.}$$

Iam

Iam iſtae ſeries loco harum poteſtatum in noſtra aequatione ſubſtituantur, et cum partes in membro ſiniſtro ſponte ſe tollant, reliquae partes ſiniſtrae partibus antecedentibus in dextro membro aequari debebunt, vnde ſequentes aequationes reſultabunt.

$$\text{I. } f' : n - f' : (n-\alpha) = \mathrm{B} f^{\circ} : (n-\beta) + \mathrm{C} f^{\circ} : (n-\gamma) = \mathrm{B} + \mathrm{C}$$

$$\text{II. } f'' : n - f'' : (n-\alpha) = \mathrm{B} f' : (n-\beta) + \mathrm{C} f' : (n-\gamma)$$

$$\text{III. } f''' : n - f''' : (n-\alpha) = \mathrm{B} f'' : (n-\beta) + \mathrm{C} f'' : (n-\gamma)$$

$$\text{IV. } f'''' : n - f'''' : (n-\alpha) = \mathrm{B} f''' : (n-\beta) + \mathrm{C} f''' : (n-\gamma)$$

etc. etc.

§. 19. In ſubſidium iam vocemus lemmata ſupra allata, ex quibus conſtat fore vt ſequitur:

I. Si fuerit $\Phi : n - \Phi : (n-\alpha) = k$, erit $\Phi : n = \frac{kn}{\alpha}$,

II. Si fuerit $\Phi : n - \Phi : (n-\alpha) = k\,(n-\lambda)$, erit

$$\Phi : n = \frac{kn}{2\alpha}(n+\alpha-2\lambda).$$

III. Si fuerit $\Phi : n - \Phi : (n-\alpha) = k\,(n-\lambda)\,(n+\alpha-3\lambda)$, erit

$$\Phi : n = \frac{kn}{3\alpha}(n+\alpha-3\lambda)(n+2\alpha-3\lambda).$$

IV. Si fuerit $\Phi : n - \Phi : (n-\alpha) = k\,(n-\lambda)(n+\alpha-4\lambda)(n+2\alpha-4\lambda)$, erit

$$\Phi : n = \frac{kn}{4\alpha}(n+\alpha-4\lambda)(n+2\alpha-4\lambda)(n+3\alpha-4\lambda).$$

V. Si fuerit $\Phi : n - \Phi : (n-\alpha) = k(n-\lambda)(n+\alpha-5\lambda)(n+2\alpha-5\lambda)(n+3\alpha-5\lambda)$, erit

$$\Phi : n = \frac{kn}{5\alpha}(n+\alpha-5\lambda)(n+2\alpha-5\lambda)(n+3\alpha-5\lambda)(n+4\alpha-5\lambda).$$

et ita porro.

§. 20. Harum lemmatum ope ex prima aequatione, vbi pro lemmate primo eſt $k = B + C$, elicimus $f' : n = \frac{Bn}{\alpha} + \frac{Cn}{\alpha}$, hinc igitur pro ſecunda aequatione erit

$$B f' : (n - \beta) = B^2 \frac{(n - \beta)}{\alpha} + B C \frac{(n - \beta)}{\alpha} \text{ et}$$
$$C f' : (n - \gamma) = C^2 \frac{(n - \gamma)}{\alpha} + B C \frac{(n - \gamma)}{\alpha},$$

$$\text{Summa} = \frac{BB(n - \beta)}{\alpha} + \frac{2BC}{\alpha}\left(n - \frac{\beta - \gamma}{2}\right) + \frac{CC}{\alpha}(n - \gamma),$$

quae formula quia ex tribus conſtat partibus, ſingulas cum lemmate ſecundo conferri oportet, ac pro prima parte erit $k = \frac{BB}{\alpha}$ et $\lambda = \beta$, pro ſecunda parte eſt $k = \frac{2BC}{\alpha}$ et $\lambda = \frac{\beta + \gamma}{2}$, pro tertia parte eſt $k = \frac{CC}{\alpha}$ et $\lambda = \gamma$, vnde ex omnibus ſimul ſumtis colligitur:

$$f'' : n = \frac{BB}{2\alpha^2}(n + \alpha - 2\beta) + \frac{2BC}{2\alpha^2} n (n + \alpha - \beta - \gamma)$$
$$+ \frac{CC}{2\alpha\alpha} n (n + \alpha - 2\gamma).$$

§. 21. Progrediamur iam ad aequationem tertiam, ac pro eius membro dextro habebimus:

$$B f'' : (n - \beta) = \frac{B^3}{2\alpha^2}(n - \beta)(n + \alpha - 3\beta)$$
$$+ \frac{2BBC}{2\alpha^2}(n - \beta)(n + \alpha - 2\beta - \gamma) + \frac{BC^2}{2\alpha^2}(n - \beta)(n + \alpha - \beta - 2\gamma),$$
$$C f'' : (n - \gamma) = \frac{C^3}{2\alpha^2}(n - \gamma)(n + \alpha - 3\gamma)$$
$$+ \frac{BBC}{2\alpha^2}(n - \gamma)(n + \alpha - \beta - 2\gamma)$$
$$+ \frac{2BCC}{2\alpha^2}(n - \gamma)(n + \alpha - \beta - 2\gamma)$$

$$\text{Summa} = \frac{B^3}{2\alpha^2}(n - \beta)(n + \alpha - 3\beta)$$
$$+ \frac{3BBC}{2\alpha^2}(n + \alpha - 2\beta - \gamma)\left(n - \frac{2\beta - \gamma}{3}\right)$$
$$+ \frac{3BCC}{2\alpha^2}(n + \alpha - \beta - 2\gamma)\left(n - \frac{\beta - 2\gamma}{3}\right)$$
$$+ \frac{C^3}{2\alpha^2}(n - \gamma)(n + \alpha - 3\gamma),$$

quae

quae quia quatuor conſtat partibus, cum lemmate III. conferendis, pro prima parte erit $k = \frac{B^3}{2\alpha^2}$ et $\lambda = \beta$, pro ſecunda parte erit $k = \frac{3BBC}{2\alpha^2}$ et $\lambda = \frac{2\beta+\gamma}{3}$; pro tertia vero parte eſt $k = \frac{3BCC}{2\alpha^2}$ et $\lambda = \frac{\beta+2\gamma}{3}$, denique pro quarta parte eſt $k = \frac{C^3}{2\alpha^2}$ et $\lambda = \gamma$, quibus obſeruatis functio quaeſita f''' itidem ex quatuor partibus conſtabit, quae ſunt:

$$f''' : n = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{B^3}{6\alpha^3} n (n + \alpha - 3\beta)(n + 2\alpha - 3\beta) \\ + \frac{3BBC}{6\alpha^3} n (n + \alpha - 2\beta - \gamma)(n + 2\alpha - 2\beta - \gamma) \\ + \frac{3BCC}{6\alpha^3} n (n + \alpha - \beta - 2\gamma)(n + 2\alpha - \beta - 2\gamma) \\ + \frac{C^3}{6\alpha^3} n (n + \alpha - 3\gamma)(n + 2\alpha - 3\gamma). \end{array} \right\}.$$

§. 22. Tractemus ſimili modo aequationem quartam, atque ex valore $f''' : n$ inuento habebimus:

$$Bf''' : (n-\beta) = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{B^4}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta) \\ + \frac{3B^3C}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma) \\ + \frac{3B^2C^2}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma) \\ + \frac{BC^3}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma) \end{array} \right\}.$$

$$Cf''' : (n-\gamma) = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{3BC^3}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma) \\ + \frac{B^3C}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma) \\ + \frac{3B^2C^2}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma) \\ + \frac{C^4}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-4\gamma)(n+2\alpha-4\gamma) \end{array} \right\}.$$

His iam terminis collectis valor formulae

$$Bf''' : (n-\beta) + Cf''' : (n-\gamma),$$

conſtabit ſequentibus quinque partibus:

$$\frac{B^4}{6\alpha^3}(n-\beta)(n+\alpha-4\beta)$$
$$+\frac{4B^3C}{6\alpha^3}\left(n-\frac{3\beta-\gamma}{4}\right)(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma)$$
$$+\frac{6B^2C^2}{6\alpha^3}\left(n-\frac{\beta-\gamma}{2}\right)(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)$$
$$+\frac{4BC^3}{6\alpha^3}\left(n-\frac{\beta-3\gamma}{4}\right)(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma)$$
$$+\frac{C^4}{6\alpha^3}(n-\gamma)(n+\alpha-4\gamma)(n+2\alpha-4\gamma)$$

§. 23. Quoniam igitur functio quaeſita $f^{IV}:n$ ex quinque partibus componitur, ſingulas cum lemmate quarto comparari oportebit, ac pro parte prima erit $k=\frac{B^4}{6\alpha^3}$ et $\lambda=\beta$; pro parte ſecunda eſt $k=\frac{4B^3C}{6\alpha^3}$ et $\lambda=\frac{3\beta+\gamma}{4}$; pro parte tertia $k=\frac{6B^2C^2}{6\alpha^3}$ et $\lambda=\frac{\beta+\gamma}{2}$; pro parte quarta eſt $k=\frac{4BC^3}{6\alpha^3}$ et $\lambda=\frac{\beta+3\gamma}{4}$; denique pro parte quinta erit $k=\frac{C^4}{6\alpha^3}$ et $\lambda=\gamma$; vnde collectis omnibus terminis reperietur

$$f^{IV}:n=\left\{\begin{array}{l}\frac{B^4}{24\alpha^4}n(n+\alpha-4\beta)(n+2\alpha-4\beta)(n+3\alpha-4\beta)\\+\frac{4B^3C}{24\alpha^4}n(n+\alpha-3\beta-\gamma)(n+2\alpha-3\beta-\gamma)(n+3\alpha-3\beta-\gamma)\\+\frac{6B^2C^2}{24\alpha^4}n(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)(n+3\alpha-2\beta-2\gamma)\\+\frac{4BC^3}{24\alpha^4}n(n+\alpha-\beta-3\gamma)(n+2\alpha-\beta-3\gamma)(n+3\alpha-\beta-3\gamma)\\+\frac{C^4}{24\alpha^4}n(n+\alpha-4\gamma)(n+2\alpha-4\gamma)(n+3\alpha-4\gamma).\end{array}\right\}$$

§. 24. Superfluum foret hos calculos vlterius proſequi; quandoquidem ex allatis iam tuto concludere licet, ſequentem functionem $f^{V}:n$ hunc habituram eſſe valorem:

$$f^{v} : n = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{B^5}{120\,\alpha^5}\, n\,(n+\alpha-5\beta)\,(n+2\alpha-5\beta)\,(n+3\alpha-5\beta)\,(n+4\alpha-5\beta) \\ + \frac{5\,B^4\,C}{120\,\alpha^5}\, n\,(n+\alpha-4\beta-\gamma)\,(n+2\alpha-4\beta-\gamma)\,(n+3\alpha-4\beta-\gamma)\,\times \\ \qquad\qquad \times\,(n+4\alpha-4\beta-\gamma) \\ + \frac{10\,B^3\,C^2}{120\,\alpha^5}\, n\,(n+\alpha-3\beta-2\gamma)(n+2\alpha-3\beta-2\gamma)(n+3\alpha-3\beta-2\gamma)\,\times \\ \qquad\qquad \times\,(n+4\alpha-3\beta-2\gamma) \\ + \frac{10\,B^2\,C^3}{120\,\alpha^5}\, n\,(n+\alpha-2\beta-3\gamma)\,(n+2\alpha-2\beta-\gamma)\,(n+3\alpha-2\beta-3\gamma)\,\times \\ \qquad\qquad \times\,(n+4\alpha-2\beta-3\gamma) \\ + \frac{5\,B\,C^4}{120\,\alpha^5}\, n\,(n+\alpha-\beta-4\gamma)\,(n+2\alpha-\beta-4\gamma)\,(n+3\alpha-\beta 4-\gamma)\,\times \\ \qquad\qquad \times\,(n+4\alpha-\beta-4\gamma) \\ + \frac{C^5}{120\,\alpha^5}\, n\,(n+\alpha-5\beta)\,(n+2\alpha-4\beta)\,(n+3\alpha-5\beta)\,(n+4\alpha-5\beta) \end{array} \right\}$$

vnde formatio omnium ſequentium functionum ſatis dilucide perſpicitur.

§. 25. Quodſi iam omnes iſti valores, quos pro functionibus $f' : n$; $f'' : n$; $f''' : n$; etc. elicuimus, in vnam ſummam colligantur, et ob $f^{\circ} : n = 1$ vnitas praefigatur, obtinebitur ſeries deſiderata, quae ſcilicet valorem poteſtatis Z^n exprimit, neque ergo opus eſt omnes iſtas functiones hic denuo collectas referre.

Corollarium.

Hae ergo ſeries infinitis conſtant terminis, in quibus omnes poſſibiles binarum litterarum B et C combinationes occurrunt. Quin etiam pro combinatione quacunquae, quae ſit $B^b\,C^c$, in genere terminus eam inuoluens aſſignari poterit. Primo enim iſta forma multiplicetur per numerum omnium combinationum, qui poſito breuitatis gratia $b + c = i$, ſi indicetur littera N, erit vti conſtat $N = \frac{1.2.3.4 \ldots\ldots i}{1.2.3.\ldots.b.\;.2.\ldots.c}$, deinde ſi ponamus $b\,\beta + c\,\gamma = \theta$, erit terminus huic formae reſpondens:

N B^b

$$\frac{N\,B^b\,C^c}{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\,i\,\alpha^i}\,n\,(n+\alpha-\theta)\,(n+2\alpha-\theta)\times$$
$$\times\,(n+3\alpha-\theta)\ldots\ldots[n+(i-1)\,\alpha-\theta].$$

Veluti ſi forma propoſita fuerit $B^3\,C^2$, erit $i=5$, hincque $N=\frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5}{1.\,2.\,3.\,1.\,2}=10$, deinde vero erit $\theta=3\beta+2\gamma$, ſicque ipſe terminus huius formae erit

$$\frac{10\,B^3\,C^2}{120\,\alpha^5}\,n\,(n+\alpha-3\beta-2\gamma)\,(n+2\alpha-3\beta-2\gamma)\times$$
$$\times\,(n+3\alpha-3\beta-2\gamma)\,(n+4\alpha-3\beta-2\gamma),$$

prorſus vt ſupra eſt exhibitus.

Scholion.

§. 26. Hinc iam abunde patet, ſi aequatio propoſita pluribus adhuc conſtet terminis, habeatque hanc formam:

$$1-\frac{1}{Z^\alpha}=\frac{B}{Z^\beta}+\frac{C}{Z^\gamma}+\frac{D}{Z^\delta}+\frac{E}{Z^\varepsilon}+\text{etc.}$$

tum ope eiusdem methodi ſeriem infinitam inueſtigari poſſe, quae valorem poteſtatis Z^n exprimat; iſta enim ſeries incipiens ab vnitate infinitos inuoluet terminos ex omnibus plane combinationibus litterarum B, C, D, E, etc. formatos. Si enim in genere proponatur haec combinatio: $B^b.\,C^c.\,D^d.\,E^e.$ etc. ſtatuatur primo $b+c+d+e=i$, et quaeratur numerus N, vt ſit

$$N=\frac{1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,i}{1.\,2.\,3.\ldots b.\,1.\,2.\,3.\ldots c.\,1.\,2.\,3.\ldots d.\,1.\,2.\,3.\ldots e.},$$

ſitque breuitatis gratia $1.\,2.\,3.\,4.\ldots\ldots i=I$, factor prior huius termini erit $\frac{N\,B^b.\,C^c.\,D^d.\,E^e.}{I.\,\alpha^i}$, praeterea vero adiungendi ſunt factores exponentem n inuoluentes, pro quibus inueniendis ſtatuatur:

$$b\beta+c\gamma+d\delta+e\varepsilon=\theta,$$

erunt-

eruntque iſti factores numero i iſti:

$$n\,(n+\alpha-\theta)\,(n+2\alpha-\theta)\,(n+3\alpha-\theta)\,\ldots\ldots\,[n+(i-1)\,\alpha-\theta],$$

ita vt totus terminus ſit

$$\frac{N\,.\,B^b\,.\,C^c\,.\,D^d\,.\,E^e}{1\,.\,\alpha^i}\,n\,(n+\alpha-\theta)\;(n+2\,\alpha-\theta)\times$$

$$\times\,(n+3\,\alpha-\theta)\;\ldots\ldots\;[n+(i-1)\,\alpha-\theta].$$

Quamobrem ſuper indole omnium harum ſerierum maxime memorabilium, quas olim in Tomo XV. Nouorum Commentariorum fuſius, ſed ſufficiente demonſtratione deſcripſi, nihil amplius deſiderari poſſe videtur.

DE INNVMERIS GENERIBVS SERIERVM MAXIME MEMORABILIVM, QVIBVS OMNIVM AEQVATIONVM ALGEBRAICARVM NON SOLVM RADICES IPSAE SED ETIAM QVAECVNQVE EARVM POTESTATES EXPRIMI POSSVNT.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 11 *April.* 1770.

§. 1.

Propoſita aequatione quacunque algebraica ad hanc formam reducta:

$$\mathfrak{A}x^{\alpha} + \mathfrak{B}x^{\beta} + \mathfrak{C}x^{\gamma} + \mathfrak{D}x^{\delta} + \mathfrak{E}x^{\epsilon} + \text{etc.} = 0,$$

vbi exponentes α, β, γ, δ, ϵ, etc. ſint numeri quicunque, ſiue integri, ſiue fracti, ſiue poſitiui, ſiue etiam negatiui, in Tomo XV. Nouorum Commentariorum oſtendi, non ſolum huius aequationis radicem x, ſed etiam quamuis poteſtatem x^n, per ſeriem infinitam ſatis concinnam, cuius omnes termini ſecundum certam legem formentur, pluribus modis exprimi poſſe, quae eo magis omni attentione, atque adeo admiratione dignae videntur, quod earum ratio propemodum omnes vires Analyſeos ſuperare videtur,

tur, propterea quod iſtae ſeries non ſolum per longas ambages ſint inuentae, ſed etiam in earum formatione plurimum inductioni ſit tributum. Quamobrem plurimum operae pretium fore videtur, vt omnes operationes, quibus hae ſeries formantur, dilucide exponantur et omnia momenta, quibus earum formatio innititur, ſummo ſtudio perpendantur. Tum enim demum ſperare licebit in veram originem iſtarum ſerierum penetrare atque omnia myſteria, quibus earum natura adhuc inuoluta deprehenditur, ad principia cognita reuocare.

§. 2. Prima operatio, qua aequationem quamcunque propoſitam ad hunc ſcopum praeparare oportet, in hoc conſiſtit, vt tota aequatio per quempiam ſuorum terminorum diuidatur, hocque modo ipſa aequatio ad huiusmodi formam reducatur:

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \frac{E}{x^\varepsilon} + \text{etc.}$$

quod ergo totidem diuerſis modis fieri poterit, quot terminis ipſa aequatio fuerit compoſita; vbi iterum eſt monendum, exponentes α, β, γ, δ, ε, etc. quoscunque numeros denotare poſſe, ſiue poſitiuos, ſiue negatiuos, ſiue integros, ſiue fractos. Quin etiam perinde eſt quonam ordine iſti termini diſponantur. Tantum hic in limine notaſſe iuuabit, quoniam ipſi radici x vna dimenſio tribuitur, propter homogeneitatam omnium terminorum quantitatibus A, B, C reſpectiue tot dimenſiones aſſignari oportere, quot exponentes α, β, γ indicant. Ita littera A cenſenda eſt habere α dimenſiones; numerus vero dimenſionum litterae B eſt β, at litterae C $= \gamma$, etc., id quod ideo probe eſt obſeruandum, quod in ſerie, quae valorem radicis x referat, omnes eius termini vnicam dimenſionem conſtituere debent. In ſeriebus autem, quae radicis x poteſ-

 tatem

tatem quamcunque x^n exprimunt, euidens eſt in ſingulis terminis litteras A, B, C, D, etc. n dimenſiones complere debere.

§. 3. His expoſitis pro quacunque radicis poteſtate x^n tot diuerſae ſeries infinitae exhiberi poſſunt, quot litterae A, B, C, D, etc. in aequatione reperiuntur, propterea quod primus ſeriei cuiusque terminus ex quouis membro illius aequationis formari poteſt, quaſi reliqui non adeſſent. Ita ex membro $x^\alpha = 1$ ſequitur $x = A^{\frac{1}{\alpha}}$ et $x^n = A^{\frac{n}{\alpha}}$; ex membro autem ſecundo $\frac{B}{x^\beta} = 1$ prodiret $x^n = B^{\frac{n}{\beta}}$; ſimilique modo ex tertio membro prodiret $x^n = C^{\frac{n}{\gamma}}$; et ita porro. Vocemus igitur illud aequationis membrum, ex quo primum ſeriei terminum conſtituere libet, aequationis membrum principale, pro quo in poſterum aſſumamus perpetuo membrum primo loco poſitum $\frac{A}{x^\alpha}$, ita vt initium ſeriei inueſtigandae ſit $x^n = A^{\frac{n}{\alpha}}$.

§. 4. Conſtituto igitur primo termino ſeriei, quae valorem ipſius x^n exprimat, qui ergo eſt $x^n = A^{\frac{n}{\alpha}}$, manifeſtum eſt omnes terminos ſequentes ex reliquis litteris B, C, D, E, etc. tam ſingulis quam vtcunque inuicem combinatis, formari debere, vnde pro reliquis terminis infinitos ordines conſtitui conueniet, quorum primus contineat ſingulas litteras B, C, D, etc. ſolitarias, ſecundus ordo omnia producta ex binis harum litterarum, quae ergo ſunt primo earum quadrata B^2, C^2, D^2 tum vero producta ex binis diuerſis BC, BD, CD, etc. tertius vero ordo complectetur omnia producta ex tribus harum littera-

litterarum, ſiue iisdem, ſiue diuerſis, quae ergo erunt B^3, C^3, D^3; B B C, B B D, B C C, B D D, B C D, etc. quartus vero ordo continebit, praeter poteſtates quartas harum litterarum, omnia producta ex quaternis earum inter ſe coniunctis. Ex quo intelligitur ordinem quintum inuoluere omnia producta ex quinis, ordinem ſextum ex ſenis, et ita porro in infinitum. Hinc totum negotium huc redit, quomodo omnes terminos cuiusque ordinis formari oporteat, vt omnibus in vnam ſummam collectis et ad primum $A^{\frac{n}{\alpha}}$ additis, prodeat ſeries infinita verum valorem poteſtatis x^n exprimens, quamobrem pro quolibet ordine regulas ſingulos terminos formandi exponamus, quemadmodum in diſſertatione initio commemorata ſunt traditae.

PRIMA REGVLA.

Pro formandis terminis primi ordinis.

§. 5. Hic ante omnia patet cum qualibet litterarum B, C, D, E, etc. eiusmodi poteſtatem ipſius A coniungi debere, vt dimenſionum numerus prodeat $= n$. Quoniam igitur littera B cenſetur habere β dimenſiones, litterae vero A numerus dimenſionum eſt α, ſi pro B ſtatuatur iſta poteſtas A^λ, tum producti $A^\lambda B$ numerus dimenſionum erit $\lambda\alpha + \beta = n$, vnde colligitur: $\lambda = \frac{n-\beta}{\alpha}$, ſicque ex littera B naſcitur $A^{\frac{n-\beta}{\alpha}}B$. Similique modo ex littera C orietur $A^{\frac{n-\gamma}{\alpha}}C$. Tum vero ex littera D orietur $A^{\frac{n-\delta}{\alpha}}D$, et ita porro. Praeterea vero his ſingulis productis praefigi opportet communem multiplicatorem $\frac{n}{\alpha}$; quamobrem termini ſeriei quaeſitae ex ſingulis litteris B, C, D, E oriundi ita ſe habebunt:

$$\frac{n}{\alpha} A^{\frac{n-\beta}{\alpha}} B + \frac{n}{\alpha} A^{\frac{n-\gamma}{\alpha}} C + \frac{n}{\alpha} A^{\frac{n-\delta}{\alpha}} D + \frac{n}{\alpha} A^{\frac{n-\varepsilon}{\alpha}} E + \text{etc.}$$

ſicque habentur omnes termini primi ordinis pro ſerie quam inueſtigamus.

SECVNDA REGVLA.
Pro formandis terminis ſecundi ordinis.

§. 6. Quoniam hic occurrunt termini dupplicis formae, ſcilicet vel ipſa quadrata B^2, C^2, D^2, vel producta ex binis diverſis B C, B D, B E, C D, etc. multiplicatores cuique formae iungendos ſeorſim euoluamus. Ac primo quidem pro forma B^2, quae habet 2β dimenſiones, iungi debet haec poteſtas $A^{\frac{n-2\beta}{\alpha}}$; deinde vero ex iis, quae in diſſertatione iam allegata demonſtraui, patet inſuper adiungi debere multiplicatorem ex duobus factoribus conſtantem $\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha}$, vnde termini ſeriei quaeſitae, qui ex quadratis B^2, C^2, D^2 oriuntur, erunt ſequentes:

Ex forma	naſcitur terminus
B B	$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha} A^{\frac{n-2\beta}{\alpha}}$ B B
C C	$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\gamma}{2\alpha} A^{\frac{n-2\gamma}{\alpha}}$ C C
D D	$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\delta}{2\alpha} A^{\frac{n-2\delta}{\alpha}}$ D D
E E	$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\varepsilon}{2\alpha} A^{\frac{n-2\varepsilon}{\alpha}}$ E E
etc.	etc.

§. 7. Pro formis autem binas litteras diuerſas inuolventibus ſufficiet conſideraſſe formam B C, quae primo recipit coëfficientem numericum numero permutationum harum litterarum reſpondentem, qui eſt 2, vt hinc habeatur 2 B C. Deinde quia numerus dimenſionum eſt $\beta+\gamma$, poteſtas ipſius A iungen-

genda erit $A^{\frac{n-\beta-\gamma}{\alpha}}$; ac denique multiplicator inſuper adiiciendus erit $\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\gamma}{2\alpha}$. His igitur coniunctis ex ſingulis noſtris formis huius ordinis orientur ſequentes termini pro ſerie quaeſita:

Ex forma	naſcitur terminus
B C	$2 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\gamma}{2\alpha} A^{\frac{n-\beta-\gamma}{\alpha}} BC$
B D	$2 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\delta}{2\alpha} A^{\frac{n-\beta-\delta}{\alpha}} BD$
B E	$2 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\varepsilon}{2\alpha} A^{\frac{n-\beta-\varepsilon}{\alpha}} BE$
C D	$2 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\gamma-\delta}{2\alpha} A^{\frac{n-\gamma-\delta}{\alpha}} CD$
C E	$2 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\gamma-\varepsilon}{2\alpha} A^{\frac{n-\gamma-\varepsilon}{\alpha}} CE$
D E	$2 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\delta-\varepsilon}{2\alpha} A^{\frac{n-\delta-\varepsilon}{\alpha}} DE$
etc.	etc.

TERTIA REGVLA.

Pro formandis terminis tertii ordinis.

§. 8. In hoc ordine primo occurrit B^3, cuius index naturalis ex permutatione ortus eſt $= 1$; deinde poteſtas ipſius A, quia dimenſionum numerus ipſius B^3 eſt 3^{β}, erit $A^{\frac{n-3\beta}{\alpha}}$. At vero multiplicator inſuper adiungendus nunc conſtabit ex tribus factoribus, eritque $\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha}$, quibus coniunctis termini ex ſingulis cubis oriundi ſe habebunt ſequenti modo:

Ex

Ex forma	naſcitur terminus
B^3	$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha} A^{\frac{n-3\beta}{\alpha}} B^3$
C^3	$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\gamma}{3\alpha} A^{\frac{n-3\gamma}{\alpha}} C^3$
D^3	$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\delta}{3\alpha} A^{\frac{n-3\delta}{\alpha}} D^3$
etc.	etc.

§. 9. Secunda forma in hoc ordine occurrens eſt BBC, cui conuenit index naturalis $= 3$, et quia numerus dimenſionum eſt $2\beta + \gamma$, poteſtas ipſius A iungenda erit $A^{\frac{n-2\beta-\gamma}{\alpha}}$; tum vero multiplicator inſuper adiiciendus erit

$$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma}{3\alpha}$$

vnde pro ſingulis formis formabuntur ſequentes termini:

Ex forma	naſcitur terminus
BBC	$3 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma}{3\alpha} A^{\frac{n-2\beta-\gamma}{\alpha}} BBC$
BCC	$3 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\beta-2\gamma}{3\alpha} A^{\frac{n-\beta-2\gamma}{\alpha}} BCC$
BBD	$3 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\gamma-2\beta-\delta}{3\alpha} A^{\frac{n-2\beta-\delta}{\alpha}} BBD$
BDD	$3 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-2\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\beta-2\delta}{3\alpha} A^{\frac{n-\beta-2\delta}{\alpha}} BDD$
etc.	etc.

In hoc ordine ſupereſt terminus BCD ternas litteras diſpares inuoluens, cuius index numericus ex permutatione natus eſt 6; et quia numerus dimenſionum hic eſt $\beta + \gamma + \delta$, poteſtas ipſius A iungenda erit $A^{\frac{n-\beta-\gamma-\delta}{\alpha}}$; at vero multiplicator inſuper iungendus erit

$$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta}{3\alpha},$$

vnde

vnde ex forma B C D naſcitur iſte terminus pro ſerie quaeſita:

$$6.\ \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta}{3\alpha}\,A^{\frac{n-\beta-\gamma-\delta}{\alpha}}\,BCD;$$

vnde facile patet quomodo termini ex reliquis formis huius naturae B C E, C D E, etc. ſint formandi, quos ſuperfluum foret hic ſeorſim apponere, quandoquidem omnes has litteras inter ſe permutare licet, quamobrem etiam in ſequentibus vnicam formam ex quolibet ordine euoluiſſe ſufficiet.

QVARTA REGVLA.
Pro formandis terminis quarti ordinis.

§. 10. Ex hactenus allatis facile intelligitur, quomodo pro ſingulis formis, quae in hoc ordine occurrunt, termini inde reſultantes formari debeant.

I. Ex forma B^4 naſcitur iſte terminus:

$$1.\ \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha}\,A^{\frac{n-4\beta}{\alpha}}\,B^4.$$

II. Ex forma $B^3 C$ naſcitur terminus

$$4.\ \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-3\beta-\gamma}{4\alpha}\,A^{\frac{n-3\beta-\gamma}{\alpha}}\,B^3 C.$$

III. Ex forma $B^2 C^2$ naſcitur terminus

$$6.\ \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-2\beta-2\gamma}{4\alpha}\,A^{\frac{n-2\beta-2\gamma}{\alpha}}\,B^2 C^2.$$

IV. Ex forma $B^2 C D$ naſcitur terminus

$$12.\ \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{4\alpha}\,A^{\frac{n-2\beta-\gamma-\delta}{\alpha}}\,B^2 CD.$$

V. Ex forma B C D E naſcitur terminus

$$24.\ \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{4\alpha}\,A^{\frac{n-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{\alpha}}\,BCDE.$$

QVINTA REGVLA.

Pro formandis terminis quinti ordinis.

§. 11. In hoc ordine ſequentes occurrunt caſus ſeorſim euoluendi:

I. Ex forma B^5 naſcitur terminus

$$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-5\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-5\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-5\beta}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-5\beta}{5\alpha} A^{\frac{n-5\beta}{\alpha}} B^5.$$

II. Ex forma $B^4 C$, poſito brev. gr. $4\beta+\gamma=\theta$, naſcitur terminus

$$5 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^4 C.$$

III. Ex forma $B^3 C^2$, poſito brev. gr. $3\beta+2\gamma=\theta$, naſcitur terminus

$$10 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^3 C^2.$$

IV. Ex forma $B^3 C D$, poſito brev. gr. $3\beta+\gamma+\delta=\theta$, naſcitur terminns

$$20 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^3 C D.$$

V. Ex forma $B^2 C^2 D$, poſito brev. gr. $2\beta+2\gamma+\delta=\theta$, naſcitur terminus

$$30 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^2 C^2 D.$$

VI. Ex forma $B^2 C D E$, poſito brev. gr. $2\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\theta$, naſcitur

$$60 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^2 C D E.$$

VII. Ex forma $B C D E F$, poſito brev. gr. $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta=\theta$, naſcitur

$$120 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-\theta}{5\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B C D E F.$$

Hinc

Hinc iam lex progreſſionis ita manifeſto perſpicitur, vt ſuperfluum foret vlteriores ordines euoluere.

REGVLA GENERALIS.
Pro terminis formae B^i inueniendis.

§. 12. Quoniam igitur hic terminus ad ordinem i pertinet, per ſe patet eius exponentem i neceſſario eſſe debere numerum integrum poſitiuum, dum reliqui exponentes α, β, γ, δ omnes plane numeros tam poſitiuos quam negatiuos, ſiue integros, ſiue fractos admittant. Deinde quia hic terminus eſt ſimplex poteſtas, eius index numericus erit $= 1$. Porro quia litterae A tribuuntur β dimenſiones, hic numerus dimenſionum erit $i\beta = \theta$, hincque poteſtas ipſius A iungenda erit $A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}$. Denique multiplicator ab exponente n pendens continebit i factores, qui ſunt

$$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdots\cdots\cdots \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}.$$

His ergo coniunctis terminus ex forma B^i oriundus erit

$$1 \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \cdots\cdots \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^i$$

quae formula facile ad terminos formae vel C^i, vel D^i, vel E^i, vel etc. transfertur.

REGVLA GENERALIS.
Pro terminis formae $B^b C^c$ inueniendis.

§. 13. Hic vt ante ſponte intelligitur exponentes b et c non niſi numeros integros poſitiuos deſignare poſſe, vnde iſte terminus pertinebit ad ordinem $b+c$. Ponamus autem $b+c=i$. Primo igitur huius termini index numericus definiri debet, quem indicemus littera N, et ex Theoria Permuta-

 tio-

tionum conſtat fore $N = \frac{1.2.3 \ldots \ldots i}{1.2.3 \ldots b \times 1.2.3 \ldots c}$. Deinde quia litterae B dimenſiones β, litterae vero C dimenſiones γ tribuuntur, numerus dimenſionum erit $b\beta + c\gamma = \theta$, hincque poteſtas ipſius A adiungenda erit $A^{\frac{n-\theta}{\alpha}}$. Tertio vero multiplicator ab exponente n pendens erit vt ante

$$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \ldots \ldots \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha},$$

niſi quod hic ipſi θ debitus valor eſt aſſignandus, quamobrem his coniunctis reperietur terminus ex forma propoſita $B^b\,C^c$ oriundus iſte:

$$N.\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \ldots \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^b\,C^c.$$

REGVLA GENERALIS.

Pro terminis formae $B^b.\,C^c.\,D^d$ formandis.

§. 14. Ponatur hic index ordinis, ad quem haec forma eſt referenda, $b + c + d = i$; numerus vero dimenſionum in hoc termino contentarum ſtatuatur vt hactenus $b\beta + c\gamma + d\delta = \theta$, vnde tam poteſtas ipſius A quam multiplicator definientur vt ante; quare cum index numericus ſit

$$N = \frac{1.2.3.4 \ldots \ldots i}{1.2 \ldots b \times 1.2 \ldots c \times 1.2 \ldots d},$$

his coniungendis terminus formae propoſitae reſpondens erit

$$N.\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \ldots \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^b.\,C^c.\,D^d.$$

FORMATIO SERIEI

Valorem ipſius x^n exprimentis.

§. 15. Poſtquam ſecundum praecepta expoſita omnes termini cuiusque ordinis in infinitum fuerint inuenti, nil aliud opus

opus eſt, niſi vt omnes iſti termini in vnam ſummam colligantur, quae ad primum terminum addita praebebit valorem poteſtatis x^n. Hinc ergo ſi ſumma omnium terminorum primi ordinis ponatur $= \mathfrak{A}$, ſecundi ordinis $= \mathfrak{B}$, tertii ordinis $= \mathfrak{C}$, etc. erit

$$x^n = A^{\frac{n}{\alpha}} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.},$$

hicque valor propterea ſatisfaciet aequationi propoſitae

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.},$$

quae cum habere queat plures radices, ſeu valores ipſius x, hic in genere vix definire licet, quemnam valorem expreſſio inuenta ſit exhibitura: plerumque quidem omnium radicum maxima quandoque etiam minima hic locum habere deprehenditur.

§. 16. Si praeter terminum principalem $\frac{A}{x^\alpha}$ aequatio vnicum contineat terminum $\frac{B}{x^\beta}$, in omnibus ordinibus vnicus tantum habebitur terminus, vnde pro hoc caſu ſeries inuenta ſe ita habebit:

$$x^n = A^{\frac{n}{\alpha}} + \frac{n}{\alpha} A^{\frac{n-\beta}{\alpha}} B + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta}{2\alpha} A^{\frac{n-2\beta}{\alpha}} BB$$

$$+ \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha} A^{\frac{n-3\beta}{\alpha}} B^3$$

$$+ \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha} A^{\frac{n-4\beta}{\alpha}} B^4$$

$$+ \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-5\beta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-5\beta}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-5\beta}{4\alpha} \cdot \frac{n+4\alpha-5\beta}{5\alpha} A^{\frac{n-5\beta}{\alpha}} B^5$$

etc.

quae ergo ſeries conuenit aequationi $1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta}$, ita vt radix poteſtatis n ex hac ſerie extracta exhibeat quampiam radicem iſtius aequationis; et quoniam pro n numerum quemcunque, ſiue poſitiuum, ſiue negatiuum, ſiue integrum, ſiue fractum accipere licet, hinc innumerabiles diuerſae formae pro eadem aequationis radice x exhiberi poſſunt.

§. 17. Sin autem aequatio praeter terminum principalem $\frac{A}{x^\alpha}$ duos pluresue complectatur terminos, tum etiam in ſerie inuenta numerus terminorum cuiusque ordinis continuo magis augebitur. Scilicet ſi numerus litterarum B, C, D, etc. fuerit $= k$, qui ergo numerum terminorum in primo ordine contentorum indicabit, tum numerus terminorum ſecundi ordinis erit $= \frac{k(k+1)}{1.2}$, tertii vero ordinis $= \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}$, quarti ordinis $= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{1.2.3.4}$, atque adeo in genere numerus terminorum ordinis i erit $= \frac{k(k+1)(k+2)\ldots\ldots(k+i-1)}{1.2.3\ldots\ldots i}$.

§. 18. Quoniam igitur in enumeratione terminorum cuiusque ordinis probe cauendum eſt, ne vlla forma praetermittatur, hoc obtinebitur ſi generatim pro ordine i euoluatur iſta poteſtas: $(B + C + D + E + \text{etc.})^i$, tum enim non ſolum omnes formae ad hunc ordinem pertinentes prodibunt, ſed etiam quaelibet forma iam adiunctum habebit ſuum indicem numericum, qui ipſi iuxta regulam permutationum conuenit, et quem ſupra deſignauimus littera N, ita vt non opus ſit eum ſeorſim inueſtigare.

PRAE-

PRAEPARATIO.

ad demonſtrationem ſerierum inuentarum.

§. 19. Quanquam iſtas ſeries iam in Tomo XV. Nouorum Commentariorum exhibui, tamen iam obſernaui, eas methodo maxime indirecta ac per plures ambages eſſe inuentas, praeterquam quod plerumque etiam ſoli inductioni innituntur, quamobrem ob ſummam dignitatem harum ſerierum maxime eſt optandum, vt earum veritas per demonſtrationem ſolidam extra omne dubium collocetur; inprimis autem deſideratur methodus directa, qua ad easdem ſeries, per operationes iam vſu receptas, peruenire liceat. Quoniam autem poſteriori requiſito nondum ſatisfacere valui, ſaltem veritatem harum ſerierum, quam firma demonſtratione corroborare mihi licuit, hic ſum expoſiturus.

§. 20. Docebo igitur ſeries, quarum conſtructionem hic tradidi, apprime ſatisfacere ipſi aequationi propoſitae:

$$1 = \frac{A}{x^{\alpha}} + \frac{B}{x^{\beta}} + \frac{C}{x^{\gamma}} + \frac{D}{x^{\delta}} + \text{etc.},$$

quae per x^n multiplicata induit hanc formam:

$$x^n = A\, x^{n-\alpha} + B\, x^{n-\beta} + C\, x^{n-\gamma} + D\, x^{n-\delta} + \text{etc.}$$

quamobrem oſtendi oportet ſeriem, quam ſupra pro exprimenda poteſtate x^n inuenire docui, reuera aequalem eſſe ſummae ſerierum, quae ſecundum eandem legem pro poteſtatibus $x^{n-\alpha}$, $x^{n-\beta}$, $x^{n-\gamma}$, etc. formantur, ſi ſcilicet reſpectiue per litteras A, B, C, D, etc. multiplicentur. Euidens autem eſt has poſteri res ſeries ex noſtra ſerie generali erui poſſe, ſi loco exponentis n ſucceſſiue ſcribantur numeri $n-\alpha$, $n-\beta$, $n-\gamma$, $n-\delta$, etc. Hoc autem ſequenti modo pro qualibet terminorum forma oſtendere licebit, vbi quidem ſufficiet

ficiet veritatem ternarum poſtremarum regularum generalium demonſtraſſe.

DEMONSTRATIO
primae regulae generalis pro terminis formae B^i.

§. 21. Supra vidimus terminum ex hac forma oriundum pro poteſtate x^n eſſe

$$1 . \frac{n}{\alpha} . \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} . \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} . \frac{n+3\alpha-\theta}{4\alpha} \cdots \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} . B^i,$$

exiſtente $\theta = i\beta$, qui ergo aequalis eſſe debet terminis eiusdem formae, qui ex membris aequationis primo et ſecundo $A x^{n-\alpha} + B x^{n-\beta}$ oriuntur, quandoquidem in reliquis membris nulli termini formae B^i locum inueniunt, propterea quod horum membrorum termini omnes vel literam C, vel D, vel E neceſſario inuoluunt. Ex primi igitur membri poteſtate $x^{n-\alpha}$ ſumi debet terminus formae B^i, quippe qui ductus in A naturam non mutat; at vero ex ſecundi membri poteſtate $x^{n-\beta}$, tantum capi debet terminus formae B^{i-1}, quippe qui per B multiplicatus praebet formam propoſitam B^i. Sicque hos binos terminos iunctos aequales fieri oportet ipſi termino propoſito.

§. 22. Quaeramus igitur primo terminum formae B^i, in poteſtate $x^{n-\alpha}$ occurrentem, quem ergo ex ipſa formula propoſita deducemus, loco n ſcribendo $n-\alpha$, qui idcirco erit

$$\frac{n-\alpha}{\alpha} . \frac{n-\theta}{2\alpha} . \frac{n+\alpha-\theta}{3\alpha} . \frac{n+2\alpha-\theta}{4\alpha} \cdots \frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{i\alpha} A^{\frac{n-\alpha-\theta}{\alpha}} B^i,$$

exiſtente $\theta = i\beta$. Deinde vero terminus formae B^{i-1} poteſtati $x^{n-\beta}$ ex ipſa formula propoſita eruetur, ſi primo loco i ſcribatur $i-1$, porro loco θ nunc ſcribi debet $\theta-\beta$, tertio

tio vero loco n ſcribendum eſt $n - \beta$, quo facto terminus reſultans erit

$$\frac{n-\beta}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \ldots \cdot \frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^{i-1},$$

quamobrem nunc priorem terminum ducamus in A, poſteriorem vero in B, et quia ambo hi termini communem habebunt factorem

$$\frac{n+\alpha-\theta \cdot n+2\alpha-\theta \cdot n+3\alpha-\theta \cdot \ldots \cdot n+(i-2)\alpha-\theta}{\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \cdot 4\alpha \cdot \ldots \cdot (i-1)\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^{i} = \Delta,$$

eorum ſumma erit

$$\Delta \left(\frac{(n-\alpha)\cdot(n-\theta)}{i\alpha} + n - \beta\right) = \frac{n[n+(i-1)\alpha-\theta]}{i\alpha} \cdot \Delta,$$

ob $i\beta = \theta$. Quamobrem reſtituto pro Δ valore aſſumto et factoribus in debitum ordinem diſpoſitis ſumma iſtorum terminorum erit:

$$\frac{n(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\ldots[n+(i-2)\alpha-\theta][n+(i-1)\alpha-\theta]}{\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \cdot 4\alpha \cdot \ldots \cdot (i-1)\alpha \cdot i\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} \cdot B^{i},$$

qui eſt ipſe terminus poteſtati x^n reſpondens, ideoque huius regulae veritas eſt demonſtrata.

DEMONSTRATIO
ſecundae regulae generalis, pro terminis formae $B^b C^c$.

§. 23. Poſtquam hic poſuimus $b+c=i$ et $b\beta+c\gamma=\theta$, tum vero $N = \frac{1.2.3.\ldots\ldots i}{1.2\ldots b \times 1.2.\ldots c}$, ipſe terminus huius formae in poteſtatem x^n ingrediens inuentus eſt

$$N \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \ldots + \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha} \cdot A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^b C^c.$$

Haec igitur expreſſio aggregatum eſſe demonſtrandum eſt 1°. ex termino formae $B^b C^c$, poteſtati $x^{n-\alpha}$ reſpondente, ducto in A; 2°. ex termino formae $B^{b-1} C^c$, poteſtati $x^{n-\beta}$ reſpondente,

ducto in B; 3°. ex termino formae $B^b C^{c-1}$, poteſtati $x^{n-\gamma}$ reſpondente, ducto in C. Euidens enim eſt in reliquis membris, quae per D, E, F, etc. multiplicata ſunt, formam propoſitam occurrere non poſſe, quandoquidem aequatio, cui ſatisfieri oportet, eſt haec:

$$x^n = A x^{n-\alpha} + B x^{n-\beta} + C x^{n-\gamma} + D x^{n-\delta} + \text{etc.}$$

§. 24. Pro inueniendo autem termino formae $B^b C^c$, in poteſtate $x^{n-\alpha}$ occurrente, perſpicuum eſt in ipſa formula propoſita tantum loco n ſcribi debere $n-\alpha$, litteras autem i, θ et N eosdem valores retinere, vnde iſte terminus, poteſtati $x^{n-\alpha}$ conueniens, erit

$$\text{I. } N \cdot \frac{n-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{n-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{4\alpha} \cdots \frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{i\alpha} A^{\frac{n-\alpha-\theta}{\alpha}} B^b C^c.$$

Deinde terminus formae $B^{b-1} C^c$, in poteſtate $x^{n-\beta}$ occurrens, deriuabitur ex ipſa formula propoſita, ſi primo loco n ſcribatur $n-\beta$; tum vero loco i hic ſcribi debet $b-1+c=i-1$; deinde loco θ ſcribi debet $(b-1)\beta+c\gamma=\theta-\beta$; denique pro indice N ſcribendum erit $\frac{1.2.3.\ldots.(i-1)}{1.2\ldots b \times 1.2\ldots c}$; ſicque loco N ſcribi oportebit $N \cdot \frac{b}{i}$, vnde ipſe iſte terminus erit

$$\text{II. } \frac{b}{i} N \cdot \frac{n-\beta}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdots\cdots \frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} \cdot B^{b-1} C^c.$$

Denique terminus $B^b C^{c-1}$, in poteſtate $x^{n-\gamma}$ occurrens, deriuabitur ex ipſa formula propoſita, ſi primo loco n ſcribatur $n-\gamma$; tum vero loco i hic ſcribi debet $b+c-1=i-1$; tertio loco θ ſcribi debet $b\beta+(c-1)\gamma=\theta-\gamma$; denique pro indice N ſcribendum erit $\frac{1.2.3.\ldots.(i-1)}{1.2.3\ldots b \times 1.2.3\ldots(c-1)}$, ſicque pro N ſcribi oportebit $N \cdot \frac{c}{i}$, vnde ipſe iſte terminus erit

$$\text{III. } \frac{c}{i} N \cdot \frac{n-\gamma}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdots\cdots \frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^b C^{c-1}.$$

Quodſi ergo harum formularum prima ducatur in A, ſecunda

in B et tertia in C, oſtendendum eſt earum ſummam ipſi formulae propoſitae fore aequalem.

§. 25. Tum autem euidens eſt poſtremos factores litterales inter ſe prodituros eſſe aequales, ſcilicet $A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} B^b C^c$; priores autem factores hunc communem habent factorem:

$$\frac{N.(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta) \ldots\ldots [n+(i-2)\alpha-\theta]}{\alpha \,.\, 2\alpha \,.\, 3\alpha \,.\, 4\alpha \ldots\ldots (i-1)\alpha},$$

qui ſi deſignetur per Δ, ſumma harum trium formularum erit

$$\Delta\left(\frac{(n-\alpha)(n-\theta)}{i\alpha} + \frac{b(n-\beta)}{i} + \frac{c(n-\gamma)}{i}\right),$$

quae expreſſio, facta euolutione, abit in hanc:

$$\frac{\Delta}{i\alpha}(nn - \alpha n - \theta n + \alpha b n + \alpha c n + \alpha\theta - \alpha b\beta - \alpha c\gamma).$$

Cum autem ſit $b\beta + c\gamma = \theta$ et $b + c = i$, iſta forma reducetur ad hanc:

$$\frac{\Delta}{i\alpha}(nn - \alpha n - \theta n + \alpha i n) = \frac{\Delta}{i\alpha} n[n + (i-1)\alpha - \theta],$$

quamobrem iſtud aggregatum reperietur hoc modo expreſſum:

$$N \,.\, \frac{n}{\alpha} \,.\, \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \,.\, \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \ldots\ldots \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} \,.\, B^b \,.\, C^c,$$

quae cum congruat cum ipſa forma propoſita, declarat veritatem noſtrae regulae.

DEMONSTRATIO
tertiae regulae generalis, pro terminis formae $B^b . C^c . D^d$.

§. 26. Poſuimus hic primo $b + c + d = i$, ſecundo $b\beta + c\gamma + d\delta = \theta$ et tertio $N = \frac{1.2.3. \ldots\ldots i}{1.2. \ldots b \times 1.2. \ldots c \times 1.2. \ldots d}$, hincque terminum iſtius formae pro poteſtate x^n inuenimus:

$$N . \frac{n}{\alpha} . \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} . \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \dots . \frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} . B^b . C^c . D^d .$$

Nunc igitur demonſtrandum eſt hanc formulam compoſitam eſſe ex quatuor ſequentibus partibus: 1°. ex termino formae eiusdem $B^b . C^c . D^d$, poteſtati $x^{n-\alpha}$ reſpondente, ducto in A; 2°. ex termino formae $B^{b-1} . C^c . D^d$, poteſtati $x^{n-\beta}$ reſpondente, ducto in B; 3°. ex termino formae $B^b . C^{c-1} . D^d$, pro poteſtate $x^{n-\gamma}$, ducto in C; 4°. ex termino formae $B^b . C^c . D^{d-1}$, pro poteſtate $x^{n-\delta}$, ducto in D.

§. 27. Prima igitur pars formabitur ex noſtra formula generali, ſi modo loco n ſcribatur $n-\alpha$, vnde facta multiplicatione per A iſta pars erit

$$\text{I. } N . \frac{n-\alpha}{\alpha} . \frac{n-\theta}{2\alpha} . \frac{n+\alpha-\theta}{3\alpha} \dots \frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{i\alpha} . A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} . B^b . C^c . D^d .$$

Pro parte autem ſecunda eruenda primo loco n ſcribi debet $n-\beta$, ſecundo loco i ſcribi debet $i-1$, tertio loco θ ſcribendum eſt $\theta-\beta$, denique loco indicis N habebimus

$$\frac{1 . 2 . 3 . \dots \dots i-1}{1 . 2 . \dots (b-1) \times 1 . 2 . \dots c . \times 1 . 2 . \dots d},$$

ita vt nunc loco N ſcribi oporteat $\frac{b}{i} . N$, quibus obſeruatis tota pars ſecunda ita ſe habebit:

$$\text{II. } \frac{b}{i} . N . \frac{n-\beta}{\alpha} . \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} . \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \dots \frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} . B^b . C^c . D^d .$$

Tertia forma ſimili modo formabitur ex ipſa propoſita, ſcribendo primo $n-\gamma$ loco n, ſecundo $i-1$ loco i et tertio $\theta-\gamma$ loco θ, at vero quarto pro indice N habebimus $\frac{c}{i}$ N, quibus obſeruatis iſta pars tertia tota erit

$$\text{III. } \frac{c}{i} . \frac{n-\gamma}{\alpha} . \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} . \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \dots \frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha} A^{\frac{n-\theta}{\alpha}} . B^b . C^c . D^d .$$

Quarta forma orietur ex principali, ſcribendo primo $n-\delta$ lo-

co

co n, ſecundo $i-1$ loco i, tertio $\theta-\delta$ loco θ et quarto $\frac{d}{i}$ N loco N, vnde fiet quarta pars

$$\text{IV}.\ \frac{d}{i}.\text{N}.\frac{n-\delta}{\alpha}.\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}.\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\ldots\frac{n+(i-2)\alpha-\theta}{(i-1)\alpha}.\text{A}^{\frac{n-\theta}{\alpha}}.\text{B}^{b}.\text{C}^{c}.\text{D}^{d}.$$

§. 28. Quoniam quatuor iſtae partes communem habent factorem hunc:

$$\Delta = \frac{\text{N}.(n+\alpha-\theta)(n+2\alpha-\theta)(n+3\alpha-\theta)\ldots n+(i-2)\alpha-\theta}{\alpha.2\alpha.3\alpha.4\alpha\ldots\ldots(i-1)\alpha}\text{A}^{\frac{n-\theta}{\alpha}}.\text{B}^{b}.\text{C}^{c}.\text{D}^{d},$$

ſumma omnium harum partium erit

$$\Delta\left(\frac{(n-\alpha)(n-\theta)}{i\alpha}+\frac{b(n-\beta)+c(n-\gamma)+d(n-\delta)}{i}\right),$$

quae expreſſio euoluta, ob $b+c+d=i$ et $b\beta+c\gamma+d\delta=\theta$, reducitur ad hanc formam: $\frac{\Delta}{i\alpha}[n(n+(i-1)\alpha-\theta]$, conſequenter tota ſumma quatuor harum partium erit

$$\text{N}.\frac{n}{\alpha}.\frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha}.\frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha}\ldots\ldots\frac{n+(i-1)\alpha-\theta}{i\alpha}.\text{A}^{\frac{n-\theta}{\alpha}}.\text{B}^{b}.\text{C}^{c}.\text{D}^{d},$$

quae eſt ipſa forma demonſtranda. Vnde iam manifeſtum eſt omnes ſeries hac methodo reſultantes veritati eſſe conſentaneas.

REGVLA FACILIS ET SVCCINCTA
omnes ſeries huius generis expedite formandi

§. 29. Propoſita aequatione quacunque huius formae:

$$1 = \frac{\text{A}}{x^{\alpha}}+\frac{\text{B}}{x^{\beta}}+\frac{\text{C}}{x^{\gamma}}+\frac{\text{D}}{x^{\delta}} + \text{etc.}$$

ponatur breuitatis gratia

$$\text{A}^{-\frac{\beta}{\alpha}}\text{B}+\text{A}^{-\frac{\gamma}{\alpha}}\text{C}+\text{A}^{-\frac{\delta}{\alpha}}\text{D}+\text{etc.}=\text{V},$$

 hinc-

hincque ſemper habebitur:

$$\frac{x^n}{A^{\frac{n}{\alpha}}} = 1 + \frac{n}{\alpha} V + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot V^2 + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\theta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\theta}{3\alpha} \cdot V^3 + \text{etc.}$$

ſi modo notetur omnes poteſtates ipſius V actu euolui debere, litteram vero θ non habere valorem fixum, ſed pro quouis termino euoluto ipſi peculiarem valorem tribui debere. Scilicet pro termino, qui continet productum $B^b . C^c . D^d . E^e$. etc. iſti litterae θ tribui oportet hunc valorem:

$$\theta = b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \text{etc},$$

hocque in ſingulis terminis obſeruato orientur eaedem ſeries, quas per regulas ſupra datas formare docuimus.

§. 30. Quanquam nulla adhuc methodus directa patet ad iſtam expreſſionem perueniendi, tamen ſequenti modo eius ratio quadantenus explicari poteſt. Cum ſit

$$1 - \frac{B}{x^\beta} - \frac{C}{x^\gamma} - \frac{D}{x^\delta} - \text{etc.} = \frac{A}{x^\alpha},$$

in membro ſiniſtro loco x vbique ſcribatur eius valor ex prima parte oriundus, ſcilicet $A^{\frac{1}{\alpha}}$, fietque

$$x^\alpha = \frac{A}{1 - A^{-\frac{\beta}{\alpha}} . B - A^{-\frac{\gamma}{\alpha}} . C - A^{-\frac{\delta}{\alpha}} . D - \text{etc.}},$$

vnde ſi hr. gr. ponatur

$$V = A^{-\frac{\beta}{\alpha}} B + A^{-\frac{\gamma}{\alpha}} C + A^{-\frac{\delta}{\alpha}} . D + \text{etc.}$$

erit $x^\alpha = \frac{A}{1-V}$, hincque ſumtis poteſtatibus exponentis $\frac{n}{\alpha}$, erit

$x^n = \frac{A^{\frac{n}{\alpha}}}{(1-V)^{\frac{n}{\alpha}}}$, quae expreſſio ſi more ſolito in ſeriem con-

ver-

vertatur, prodibit

$$\frac{x^n}{A^{\frac{n}{\alpha}}} = (1 - V)^{-\frac{n}{\alpha}} = 1 + \frac{n}{\alpha} V + \frac{n}{\alpha} \frac{(n + \alpha)}{2\alpha} V^2$$

$$+ \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha}{3\alpha} V^3 + \text{etc.}$$

haec ergo expreſſio introductione litterae θ, modo ante expoſito definiendae, transformabitur in ipſam formam modo traditam:

$$\frac{x^n}{A^{\frac{n}{\alpha}}} = 1 + \frac{n}{\alpha} V + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \theta}{2\alpha} \cdot V^2 + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \theta}{2\alpha} \cdot \frac{n + 2\alpha - \theta}{3\alpha} \cdot V^3 + \text{etc.}$$

haecque ſpeculatio aliis forte occaſionem praebere poterit formationem huius ſeriei a priori inueſtigandi.

DE

DE BINIS CVRVIS ALGEBRAICIS INVENIENDIS, QVARVM ARCVS INDEFINITE INTER SE SINT AEQVALES.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 20 Iun. 1776.

§. 1.

Tab I. Fig. 2. et 3. Sint AY et ay huiusmodi binae curuae algebraicae, quarum arcus AY et ay inter ſe ſint aequales; ac pro priore vocentur coordinatae orthogonales $AX = X$ et $XY = Y$; pro altera vero $ax = x$ et $xy = y$, tum igitur requiritur vt ſit

$$\sqrt{(\partial X^2 + \partial Y^2)} = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}.$$

Hunc in finem, introducta in calculum noua variabili z, quaeſtio huc redit: cuiusmodi quatuor functiones algebraicae iſtius quantitatis z pro quaternis illis coordinatis X, Y et x, y accipi debeant, vt vtrinque elementa curuae inter ſe euadant aequalia, ſiue vt fiat $\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial x^2 + \partial y^2$? Talibus enim functionibus inuentis manifeſtum eſt, inde pro vtraque curua aequationes algebraicas inter binas coordinatas erui poſſe, ita vt ambae curuae proditurae ſint algebraicae.

§. 2.

§. 2. Quo nunc hanc conditionem facilius adimpleamus, quatuor illas coordinatas ſequenti modo per partes exprimamus:

$$X = p + q;\quad x = p - q;$$

$$Y = r - s;\quad y = r + s;$$

ſic enim pro priori curua reperietur

$$\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 + \partial s^2 + 2\partial p\partial q - 2\partial r\partial s;$$

pro altera vero curua erit

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial q^2 + \partial p^2 + \partial r^2 + \partial s^2 - 2\partial q\partial p + 2\partial r\partial s,$$

quae formulae cum inter ſe debeant eſſe aequales, ſatisfieri oportebit huic aequationi: $\partial p\,\partial q = \partial r\,\partial s$. Sicque tota quaeſtio perducta eſt ad quaternas functiones algebraicas ipſius z pro litteris p, q, r, s, inueniendas, vt fiat $\partial p\,\partial q = \partial r\,\partial s$, cui conditioni haud difficulter infinitis modis ſatisfieri poſſet, ſi in ſolutionibus particularibus acquieſcere vellemus.

§. 3. Veluti ſi ponamus $p = Az^\alpha$, $q = Bz^\beta$, $r = Cz^\gamma$, $s = Dz^\delta$, effici debet vt fiat

$$AB\alpha\beta z^{\alpha+\beta-2}\partial z^2 = CD\gamma\delta z^{\gamma+\delta-2}\partial z^2.$$

Hic igitur duabus conditionibus erit ſatisfaciendum: primo enim fieri debet $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, tum vero $AB\alpha\beta = CD\gamma\delta$. Vt nunc priori conditioni commodiſſime ſatisfaciamus, ſtatuamus

$$\alpha = \lambda + \mu,\ \beta = \lambda - \mu,\ \gamma = \lambda + \nu,\ \delta = \lambda - \nu;$$

ſic enim fiet $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 2\lambda$. His autem valoribus ſubſtitutis altera conditio poſtulat vt fiat

$$AB(\lambda^2 - \mu^2) = CD(\lambda^2 - \nu^2),$$

ſiue $\frac{AB}{CD} = \frac{\lambda^2 - \nu^2}{\lambda^2 - \mu^2}$; cui conditioni nitidiſſime et generaliſſime ſatisfaciemus, ponendo:

$$A = fg(\lambda + \nu), \quad C = fh(\lambda + \mu),$$
$$B = hk(\lambda - \nu), \quad D = gk(\lambda - \mu),$$

vbi tam tres numeros λ, μ et ν, quam quatuor quantitates f, g, h et k prorſus pro lubitu aſſumere licet; quamobrem hinc pro priore curua nanciſcemur coordinatas

$$X = fg(\lambda + \nu) z^{\lambda + \mu} + hk(\lambda - \nu) z^{\lambda - \mu},$$
$$Y = fh(\lambda + \mu) z^{\lambda + \nu} - gk(\lambda - \mu) z^{\lambda - \nu},$$

pro altera vero curua habebimus

$$x = fg(\lambda + \nu) z^{\lambda + \mu} - hk(\lambda - \nu) z^{\lambda - \mu},$$
$$y = fh(\lambda + \mu) z^{\lambda + \nu} + gk(\lambda + \mu) z^{\lambda - \nu}.$$

Pro vtraque autem curua erit elementum curuae

$$= \sqrt{\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 + \partial s^2}.$$

§. 4. Verum hic nobis imprimis eſt propoſitum in ſolutionem generalem inquirere, quae omnes plane ſpeciales in ſe complectatur, ideoque conditioni inuentae $\partial r \partial s = \partial p \partial q$ generaliſſime erit ſatisfaciendum. Cum igitur hinc ſit $\partial s = \frac{\partial p \partial q}{\partial r}$, eiusmodi functiones pro p, q, r, inueſtigari oportet, vt iſta formula differentialis $\frac{\partial p \partial q}{\partial r}$ integrationem admittat; vbi quidem, quoniam haec vnica conditio eſt adimplenda, facile intelligitur, ex ternis quantitatibus p, q et r binas arbitrio noſtro penitus relinqui. Quamobrem aſſumtis pro q et r functionibus quibuscunque algebraicis ipſius z, inde colligatur valor formulae $\frac{\partial q}{\partial r}$, qui ergo itidem erit functio algebraica ipſius z ſimulque cognita, quam indicemus littera u, ita vt ſit $\frac{\partial q}{\partial r} = u$, atque adeo $\partial s = u \partial p$, cui igitur conditioni ſatisfieri oportet.

§. 5. Cum igitur hic u tanquam functio cognita ipſius z ſpectetur, totum negotium redit ad functionem p inueſtigan-

ſtigandam. Quare cum ſit $s = \int u \partial p$, per reductionem notiſſimam habebimus $s = pu - \int p \partial u$, ita vt formula differentialis $p \partial u$ integrabilis reddi debeat. Statuatur ergo $\int p \partial u = v$, exiſtente v functione pariter algebraica ipſius z, vnde ergo fiet $p = \frac{\partial v}{\partial u}$, hincque porro

$$s = pu - v = \frac{u \partial v}{\partial u} - v,$$

ſicque vniuerſi conditioni praeſcriptae erit ſatisfactum, atque adeo pro v functionem quamcunque algebraicam ipſius z pro arbitrio aſſumere licebit.

§. 6. Ecce ergo quaeſtionis noſtrae propoſitae ſolutio generaliſſima ſequenti modo adornari poterit: 1.) Pro litteris q et r ſumantur pro lubitu functiones quaecunque algebraicae ipſius z, ex quibus deducatur quantitas $u = \frac{\partial q}{\partial r}$. 2.) Accipiatur etiam pro v functio quaecunque algebraica ipſius z, ita vt adeo tres functiones ipſius z arbitrio noſtro penitus permittantur. 3.) His igitur conſtitutis binae reliquae litterae p et s ita accipiantur, vt ſit

$$p = \frac{\partial v}{\partial u} \text{ et } s = \frac{u \partial v}{\partial u} - v.$$

Quibus inuentis ambae curuae quaeſitae ita determinabuntur, vt earum coordinatae orthogonales futurae ſint

Pro curua A Y:	*Pro curua* a y:
$X = \frac{\partial v}{\partial u} + q$	$x = \frac{\partial v}{\partial u} - q$,
$Y = r - \frac{u \partial v}{\partial u} + v$	$y = r + \frac{u \partial v}{\partial u} - v$;

haecque ergo ſolutio ita eſt generalis, vt omnes plane caſus poſſibiles in ſe complectatur.

§. 7. Cum igitur ſit vtriusque curuae elementi quadratum $= \partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 + \partial s^2$, quoniam primo eſt $\partial q = u \partial r$, tum vero $s = pu - v$, ob $\partial v = p \partial u$ erit $\partial s = u \partial p$; vnde his valoribus ſubſtitutis obtinebitur elementum vtriusque curuae $= \sqrt{(1 + uu)(\partial p^2 + \partial r^2)}$.

§. 8. Cum igitur porro ſit $\partial q = u \partial r$ et $\partial s = u \partial p$, erit pro priore curua AY formula $\frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{\partial p + u \partial r}{\partial r - u \partial p}$, quae, ducta in curua AY normali YN, exprimit tangentem anguli ANY. Simili modo in altera ay, ſi pariter ducatur normalis yn, erit anguli any tangens $= \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial p - u \partial r}{\partial r + u \partial p}$. Quamobrem ſi introducamus binos angulos Φ et θ, ita vt ſit tang. $\Phi = \frac{\partial p}{\partial r}$ et tang. $\theta = u$, euadet

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{tang. \Phi + tang. \theta}{1 - tang. \Phi \, tang. \theta} = \text{tang.} (\Phi + \theta) \text{ et}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{tang. \Phi - tang. \theta}{1 + tang. \Phi \, tang. \theta} = \text{tang.} (\Phi - \theta).$$

Vnde manifeſtum eſt, angulos ANY et any, quibus vtriusque curuae amplitudo menſuratur, fore ANY $= \Phi + \theta$ et $any = \Phi - \theta$.

§. 9. Hinc igitur intelligitur, ambas noſtras curuas communi amplitudine gaudere non poſſe, niſi fuerit angulus $\theta = 0$; tum autem foret $u = 0$, ideoque, ob $\partial q = u \partial r$ et $\partial s = u \partial p$, ambae quantitates q et s forent conſtantes, quae ergo ponantur $q = a$ et $s = b$, vnde propterea prodiret $X = p + a$ et $Y = r - b$, tum vero $x = p - a$ et $y = r + b$; ſicque foret $x = X - 2a$ et $y = Y + 2b$, vnde manifeſtum eſt, ambas curuas prorſus fore easdem, verum coordinatas tantum ad alios axes referri.

§. 10.

§. 10. Cum igitur hoc problema feliciſſimo cum ſucceſſu generaliter expediuerimus, ſi ternae functiones arbitrariae q, r et v ita definiri poſſent, vt altera curua oriatur data, veluti ſiue ellipſis ſiue hyperbola, tum ſimul inueniretur alia curva propoſitae aequalis. Verum talem methodum vix, ac ne vix quidem, ſperare licet, quandoquidem problema generale curvam quamcunque datam in alias diuerſas eiusdem longitudinis transformandi vires Analyſeos ſuperare videtur.

Alia Solutio quaeſtionis propoſitae.

§. 11. Cum tota ſolutio perducta ſit ad hanc aequationem: $\partial p \partial q = \partial r \partial s$, ſiue $\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial r}$, ſtatuatur tam $\frac{\partial s}{\partial p} = z$ quam $\frac{\partial q}{\partial r} = z$, et quaecunque accipiatur aequatio algebraica inter p et s, qua littera s definiatur per certam functionem ipſius p, erit etiam $\frac{\partial s}{\partial p}$ certa functio ipſius p, qua ipſi z aequali poſita quantitas p, ideoque et altera s, per z determinabitur. Simili modo ſumta inter q et r aequatione algebraica quacunque, ex qua q definiatur per certam functionem ipſius r, fiet etiam $\frac{\partial q}{\partial r}$ certa functio ipſius r, quae poſita $= z$ dabit itidem tam r quam q per functiones ipſius z expreſſas. Inuentis autem his quatuor functionibus p, q, r, s, ambae curuae quaeſitae ita determinabuntur per ſuas vtraque coordinatas, vt ſit

$$X = p + q, \quad Y = r - s;$$
$$x = p - q, \quad y = r + s.$$

§. 12. Quoniam vero iſta ſolutio poſtulat reſolutionem aequationum omnis generis, ſiquidem generalis eſſe debeat, prior ſolutio huic ſine dubio longe eſt anteferenda. Interim tamen etiam haec ſolutio vſu non caret, dum nobis egregiam

 con-

conſtructionem geometricam binarum curuarum, quae quaeruntur, ſuppeditat, quae ita ſe habet.

CONSTRVCTIO GEOMETRICA
Curuarum quaeſitarum.

Tab. I. Fig. 4. §. 13. Super communi axe deſcribantur binae curuae algebraicae quaecunque bs et cq, in quibus perpetuo capiantur bina puncta s et q, vbi tangentes st et $q\theta$ inter ſe ſiant parallelae; tum ductis applicatis sp et qr habebuntur quatuor noſtrae quantitates, ſcilicet $bp = p$, $ps = s$ et $cr = r$, $rq = q$. Quia enim $\frac{\partial s}{\partial p}$ exprimit tangentem anguli ad t et $\frac{\partial q}{\partial r}$ tangentem anguli ad θ, cum hi anguli ſint aequales, erit vtique $\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial r}$, ideoque $\partial p \partial q = \partial r \partial s$, vti requiritur. Quamobrem ex his duabus curuis pro arbitrio aſſumtis binae curuae quaeſitae hoc modo conſtruentur:

Fig. 2 et 3.

Pro curua AY	Pro curua ay
$AX = bp + rq$	$ax = bp - rq$
$XY = cr - ps$	$xy = cr + ps$

quae conſtructio ob elegantiam vtique notatu maxime eſt digna.

§. 14. Pro curua bs ſumamus parabolam hac aequatione contentam: $ss = 2ap$; pro altera autem cq circulum aequatione $qq = 2ar - rr$ expreſſum; tum igitur erit

$$\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{a}{\sqrt{2ap}} \text{ et } \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{a-r}{\sqrt{2ar-rr}};$$

quae duae quantitates inter ſe aequales eſſe debent: perinde enim eſt ſiue ſibi immediate aequales ſtatuantur, ſiue vtraque ipſi z aequalis ſtatuatur. Hoc modo omnia ad ſolam quantitatem r reuocare licebit; quandoquidem habebimus:

$$p = \frac{a(2ar-rr)}{2(a-r)^2}, \quad q = \sqrt{(2ar-rr)} \text{ et } s = \frac{a\sqrt{(2ar-rr)}}{a-r}.$$

Vnde

Vnde pro binis curuis has nanciſcimur coordinatas:

Pro curua A Y	Pro curua ay
$X = \frac{a(2ar - rr)}{2(a-r)^2} + \sqrt{(2ar - rr)}$	$x = \frac{a(2ar - rr)}{2(a-r)^2} - \sqrt{(2ar - rr)}$
$Y = r - \frac{a\sqrt{(2ar - rr)}}{a - r}$	$y = r + \frac{a\sqrt{(2ar - rr)}}{a - r}$

Vbi quantitatem r tantum vsque ad $r = a$ augere licet, quia tum ambae curuae in infinitum excurrent.

SOLV-

SOLVTIO PROBLEMATIS
EX
METHODO TANGENTIVM INVERSA.

Auctore

NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. die 24 *April.* 1788.

§. 1.

Dubium nuper agitabatur circa rectificabilitatem curuarum, quarum radii oſculi in quouis puncto aequales ſunt diſtantiae puncti curuae a puncto quocunque fixo, quippe cui conditioni, vti recte monebat dubii auctor, etiam ſatisfaciunt curuae non rectificabiles, ſcilicet omnes circuli circa punctum illud fixum tanquam centrum deſcripti. Haec obſeruatio mihi occaſionem aperuit in has curuas accuratius inquirendi, quae ob varias, quibus inſtructae ſunt, proprietates omnem attentionem mereri videntur. Rem autem multo generalius ſum aggreſſus, incipiendo a reſolutione ſequentis problematis, cuius caſus ille memoratus eſt tantum ſolutio maxime particularis et quod ita enunciatur:

Tab. II. Fig. 1. Inuenire curuam CY, cuius radius oſculi YR vbique aequalis ſit functioni cuicunque diſtantiae puncti Y a puncto quocunque fixo A.

§. 2.

§. 2. Ope ſolutionis huius problematis generaliſſimi tractaui duos caſus principales ſpecialiores; alterum quo radius oſculi multiplo cuicunque diſtantiae aequalis ponitur; alterum vero, quo radius oſculi poteſtati diſtantiae eſt proportionalis. Vtrumque autem caſum multo facilius, quam quidem ipſe ſperaueram, reſoluere et ad aequationes perducere licuit, quarum ope curuae facillime conſtruuntur, id quod vnice congruae optioni elementorum ad calculum idoneorum eſt tribuendum, a qua plerumque ſucceſſus huiusmodi disquiſitionum pendet. Cum igitur methodus in ſoluendo hoc problemate adhibita etiam in reſolutione aliarum huiusmodi quaeſtionum vſum praeſtare queat, eam heic exponere non dubito.

§. 3. Sit igitur Y punctum in curua quaeſita et A punctum fixum, cuius diſtantiae a puncto Y radius oſculi YR aequalis eſſe debet. Ducatur igitur per punctum A vtcunque recta AB, in eamque, tanquam in axem, ex puncto Y agatur normalis YX, vocenturque coordinatae $AX = x$, $XY = y$, diſtantia vero $AY = \sqrt{(xx + yy)} = z$, cuius functio radio oſculi aequanda deſignetur littera Z; et cum, poſito $\partial y = p\,\partial x$, radius oſculi ſit $YR = -\frac{\partial x (1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{\partial p}$, habebimus hanc aequationem naturam curuae quaeſitae determinantem:

$$Z = -\frac{\partial x (1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{\partial p},\ \text{ſiue}$$

$$\frac{\partial x}{Z} = -\frac{\partial p}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 4. Quo ad ſiniſtram partem huius aequationis ſola variabilis z occurrat, ducatur ea in $x + py$, quo facto fiet

$$\frac{x\partial x+y\partial y}{Z}=\frac{z\partial z}{Z}=-\frac{x\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}-\frac{py\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

quae aequatio ſponte eſt integrabilis: per notiſſimam enim integralium reductionem erit pro parte dextra

$$\int\frac{x\partial x}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}=\frac{px}{\sqrt{(1+pp)}}-\int\frac{p\partial x}{\sqrt{(1+pp)}};$$

$$\int\frac{py\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{y}{\sqrt{(1+pp)}}+\int\frac{p\partial x}{\sqrt{(1+pp)}};$$

vnde colligitur $\int\frac{z\partial z}{Z}=\frac{y-px}{\sqrt{(1+pp)}}$.

§. 5. Hic autem commode vſu venit vt huius aequationis membrum $\frac{y-px}{\sqrt{(1+pp)}}$ geometrice aſſignari queat. Ducatur enim tangens curuae Y T, in eamque ex puncto A normalis agatur A T, et in radium oſculi Y R ducatur normalis A V, atque euidens eſt fore Δ X Y N $\sim$ Δ V A N, hincque Y N : X N = A N : V N, vnde deducitur V N $=\frac{XN.AN}{YN}$. Conſtat autem eſſe Subnormalem X N $=py$ et Normalem Y N $=y\sqrt{(1+pp)}$, vnde fit A N $=x+py$ et V N $=\frac{p(x+py)}{\sqrt{(1+pp)}}$, conſequenter erit Y V = Y N — V N $=\frac{y-px}{\sqrt{(1+pp)}}$. Quodſi igitur perpendiculum in tangentem vocetur A F $=t$, erit $\frac{y-px}{\sqrt{(1+pp)}}=t$, ideoque aequatio pro curua $\int\frac{z\partial z}{Z}=t$.

§. 6. Eadem aequatio etiam ſequenti modo eruitur. Tab II. Fig. 2. Ex puncto curuae proximo y ducantur radius oſculi y R, tangens $y\,t$ et diſtantia y A, inque poſteriorem ex Y perpendiculum Y v, ductoque perpendiculo A t tangentem Y T ſecante in u, erit Δ Y R y $\sim$ Δ $t\,y\,u$, vnde fit Y R : Y y = $t\,y$: $t\,u$, hincque oritur Y R $=\frac{Yy.ty}{tu}=\frac{Yy.TY}{tu}$. Tum vero eſt Δ v Y y $\sim$

Δ T

Δ T A Y, vnde deducitur $Yy \times TY = vy \times AY$, hincque radius oſculi $YR = \frac{vy \cdot AY}{tu}$. Eſt vero $AY = z$, $vy = \partial z$ et $tu = \partial t$, ergo $YR = \frac{z \partial z}{\partial t}$, quae expreſſio ſi functioni Z aequalis ponatur, orietur aequatio $\frac{z \partial z}{\partial t} = Z$, ſiue $\int \frac{z \partial z}{Z} = t$.

§. 7. Introducatur nunc in calculum angulus B A Y, quem diſtantia A Y cum axe A B conſtituit, et poſito hoc angulo $BAY = \Phi$, erit eius elementum $YAy = \partial \Phi$, ideoque $Yv = z \partial \Phi$, hincque elementum arcus $AY = s$ erit

$$Yy = \partial s = \sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}.$$

Ex ſimilitudine autem triangulorum vYy et T A Y ſequitur $Yv = \frac{vy \cdot AT}{TY}$, vnde fit $Yv = z \partial \Phi = \frac{t \partial z}{\sqrt{(zz - tt)}}$, conſequenter $\partial \Phi = \frac{t \partial z}{z \sqrt{(zz - tt)}}$. Cum igitur t ſit functio ipſius z, ex hac aequatione quouis caſu innoteſcit relatio inter diſtantiam z et angulum Φ, vnde curua per quadraturas conſtrui poterit. In genere autem vlterius progredi non licet; quamobrem noſtram ſolutionem ad caſus illos initio memoratos applicabimus.

I. Euolutio caſus

quo radius oſculi aequatur multiplo diſtantiae.

§. 8. Ponamus igitur hic $Z = nz$, exiſtente n numero quocunque ſiue integro, ſiue fracto, et aequatio relationem exprimens inter diſtantiam $AY = z$ et perpendiculum in tangentem $AT = t$, hoc caſu erit $t = \int \frac{z \partial z}{nz} = \frac{z - a}{n}$, denotante a quantitatem conſtantem per integrationem ingreſſam. Hoc autem valore pro t in expreſſione pro elemento $\partial \Phi$ ſupra inventa ſubſtituto erit

$$\partial \Phi = \frac{(z - a) \partial z}{z \sqrt{2az - aa + (nn - 1) zz}}.$$

§. 9. Hanc quidem formulam haud difficulter, poſito $\frac{z-a}{z} = s$ et $\sqrt{(nn - ss)} = n - us$, ad rationalitatem perducere et per logarithmos et arcus circulares integrare liceret, vnde reſtituto valore z pro quauis diſtantia z angulum Φ aſſignare poſſemus; verum inde nihil circa naturam curuae pateret: difficillime enim foret ex illa aequatione viciſſim diſtantiam z per angulum Φ definire, vti conſtructio curuae poſtulat. Sequenti autem modo res ſine vlla difficultate perfici poteſt.

Tab. II. Fig. 1. §. 10. Ducatur recta Y S, normalis in diſtantiam A Y, voceturque angulus, quem curua cum tangente conſtituit, ſcilicet angulus A Y T $= \theta$ et angulus T Y S $= 2\psi$, eritque $\theta = 2\psi - 90°$. Tum vero ex triangulo A Y T habebitur ſin. $\theta = \frac{AT}{AY} = \frac{t}{z} = \frac{z-a}{nz}$, vnde colligitur $z = \frac{a}{1 - n\,\text{ſin.}\,\theta} = \frac{a}{1 + n\,\text{coſ.}\,2\psi}$. Hinc autem fit

$$\partial z = \frac{2na\,\partial\psi\,\text{ſin.}\,2\psi}{(1+n\,\text{coſ.}\,2\psi)^2} \text{ et } \frac{\partial z}{z} = \frac{2n\,\partial\psi\,\text{ſin.}\,2\psi}{1+n\,\text{coſ.}\,2\psi}.$$

Vnde cum in genere pro elemento anguli Φ hanc inuenerimus expreſſionem: $\partial\Phi = \frac{t\,\partial z}{z\sqrt{(zz-tt)}}$, ob $\frac{t}{\sqrt{(zz-tt)}} = \frac{AT}{YT} =$ tang. $\theta = -$ cot. 2ψ, erit

$$\partial\Phi = -\frac{\partial z}{z}\,\text{cot.}\,2\psi = -\frac{2n\,\partial\psi\,\text{coſ.}\,2\psi}{1+n\,\text{coſ.}\,2\psi}.$$

Denique etiam notetur elementum arcus

$$\partial s = \sqrt{\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2} = \frac{2na\,\partial\psi}{(1+n\,\text{coſ.}\,2\psi)^2}.$$

§. 11. Quo nunc angulum Φ definire queamus, eius differentiale hoc modo repraeſentemus:

$$\partial\Phi = -2\,\partial\psi + \frac{2\,\partial\psi}{1+n\,\text{coſ.}\,2\psi},$$

cuius integrale eſt

$$\Phi = C - 2\psi + \int\frac{2\,\partial\psi}{1+n\,\text{coſ.}\,2\psi}.$$

Pona-

Ponatur coſ. $2\psi = \frac{1-qq}{1+qq}$, atque habebimus

$$\text{ſin. } 2\psi = \frac{2q}{1+qq} \text{ et } 2\partial\psi \text{ coſ. } 2\psi = \frac{2\partial q(1-qq)}{(1+qq)^2},$$

vnde fit

$$2\partial\psi = \frac{2\partial q}{1+qq} \text{ et } 1 + n \text{ coſ. } 2\psi = \frac{1+n+(1-n)qq}{1+qq}$$

quibus valoribus ſubſtitutis orietur

$$\int \frac{2\partial\psi}{1+n\,coſ.\,2\psi} = \int \frac{2\partial q}{1+n+(1-n)qq}.$$

At vero integrale $\int \frac{2\partial q}{1+n+(1-n)qq}$ triplici modo aſſignari poterit, prouti fuerit vel $n = 1$, vel $n < 1$, vel $n > 1$. Nam:

Si $n = 1$, erit $\int \frac{2\partial q}{1+n+(1-n)qq} = \int \partial q = q$;

Si $n < 1$, erit $\int \frac{2\partial q}{1+n+(1-n)qq} = \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}} \text{Atang.}\, q\sqrt{\frac{1-n}{1+n}}$;

Si $n > 1$, erit $\int \frac{2\partial q}{1+n+(1-n)qq} = \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\, l\, \frac{1+q\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}}{1-q\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}}$.

Cum igitur ſit $\frac{1-qq}{1+qq} = $ coſ. 2ψ, habebimus

$$q = \sqrt{\frac{1-coſ.\,2\psi}{1+coſ.\,2\psi}} = \text{tang. } \psi, \text{ ideoque}$$

Pro caſu $n = 1$:

$$\Phi = C - 2\psi + \text{tang. } \psi;$$

Pro caſu $n < 1$:

$$\Phi = C - 2\psi + \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}} \text{A tang. } [\sqrt{\frac{1-n}{1+n}} \text{ tang. } \psi];$$

Pro caſu $n > 1$:

$$\Phi = C - 2\psi + \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\, l\, \frac{1+\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \text{ tang. } \psi}{1-\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \text{ tang. } \psi}.$$

§. 12. Pro integrando elemento arcus curuae $\partial s = \frac{2 n a \partial \psi}{(1 + n \cos. 2\psi)^2}$ ſtatuatur

$$\frac{s}{n a} = \int \frac{2 \partial \psi}{(1 + n \cos 2\psi)^2} = \frac{A \sin. 2\psi}{1 + n \cos 2\psi} + B \int \frac{2 \partial \psi}{1 + n \cos. 2\psi},$$

et ſumtis differentialibus erit

$$\frac{2 \partial \psi}{(1 + n \cos. 2\Phi)^2} = \frac{2 A \partial \psi (n + \cos. 2\psi)}{(1 + n \cos. 2\psi)^2} + \frac{2 B \partial \psi}{1 + n \cos. 2\psi},$$

ſiue

$$1 = A (n + \operatorname{coſ}. 2\psi) + B (1 + n \operatorname{coſ}. 2\psi),$$

vnde patet fieri debere $A n + B = 1$ et $A + n B = 0$, hoc eſt $A = \frac{-n}{1 - n n}$ et $B = \frac{1}{1 - n n}$, quibus valoribus ſuffectis habebimus

$$\frac{s}{n a} = \frac{- n \sin. 2\psi}{(1 - n n)(1 + n \cos. 2\psi)} + \frac{1}{1 - n n} \int \frac{2 \partial \psi}{1 + n \cos. 2\psi}.$$

Eſt vero $\int \frac{2 \partial \psi}{1 + n \cos 2\psi} = \Phi + 2\psi - C$, ideoque

$$s = \frac{- n n a \sin. 2\psi}{(1 - n n)(1 + n \cos. 2\psi)} + \frac{n a}{1 - n n} (\Phi + 2\psi - C).$$

§. 13. Hoc igitur modo beneficio anguli illius TYS $= 2\psi$, vel, quod eodem redit, anguli $AYT = \theta$, (ex ſequentibus enim patebit angulum ψ tantum commodioris calculi gratia fuiſſe introductum), peruenimus ad ſolutionem problematis omnibus numeris perfectam, quoniam curuam expreſſionum

$$z = \frac{a}{1 + n \cos. 2\psi} \text{ et } \Phi = C - 2\psi + \int \frac{2 \partial \psi}{1 + n \cos. 2\psi},$$

ope conſtruere poſſumus. Si enim angulo ψ ſucceſſiue tribuantur omnes valores a $\psi = 0$ vsque ad $\psi = 90°$, pro quolibet innoteſcet diſtantia $AY = z$ et angulus $BAY = \Phi$, hoc eſt poſitio et longitudo rectae AY, ita vt quotquot lubuerit curuae puncta determinare valeamus. Quoniam autem pro angulo Φ tres obtinuimus valores penitus a ſe inuicem diuerſos, pro caſibus ſcilicet $n = 1$, $n < 1$, $n > 1$, hos caſus ſedulo diſtinguemus et in naturam curuarum problemati ſatisfacientium

accu-

accuratius inquiſituri vnumquemque ſeorſim euoluemus. Incipiamus igitur a caſu ſimpliciſſimo, quo radius oſculi ipſi diſtantiae eſt aequalis.

Euolutio primi caſus.

quo $n = 1$.

§. 14. Hic igitur habebimus diſtantiam $z = \frac{a}{1 + n\, coſ.\, 2\psi} = \frac{a}{2\, coſ.\, \psi^2}$, et angulum $\Phi = C - 2\psi + \text{tang.}\, \psi$. Quodſi autem conſtantem illam arbitrariam C, per integrationem ingreſſam, ita determinemus, vt angulus Φ euaneſcat poſito $\psi = 0$, erit $C = 0$, ideoque $\Phi = \text{tang.}\, \psi - 2\psi$. Hinc ſi ſtatuatur $\psi = 0$, erit $\Phi = 0$ et $z = \frac{1}{2} a$; vnde patet, ſi in axe A B capiatur intervallum A C $= \frac{1}{2} a$, fore C punctum in curua. Tum autem, ob $\theta = 2\psi - 90^\circ = -90^\circ$, curua in puncto C axi normaliter inſiſtit, exiſtente radio oſculi in hoc puncto C E $=$ C A $= \frac{1}{2} a$.

§. 15. Statuatur nunc $\psi = 45^\circ$, erit $\theta = 0$, hoc eſt tangens curuae Y T in ipſam diſtantiam Y A incidit. Hoc manifeſto euenit in puncto F, exiſtente tangente vel diſtantia A F $= a$. Tum vero euidens eſt, quoniam recta A F curvam in F tangit, fore angulum Φ in huius portionis curuae puncto F maximum, exiſtente eius valore

$$\Phi = \text{B A F} = \text{tang.}\, 45^\circ - 90^\circ = -32^\circ, 42'.$$

Ex eo autem, quod hic euenit, ratio quoque fit manifeſta, cur pro puncto curuae C prodierit angulus $\theta = -90^\circ$. Tribuimus enim huic angulo θ poſitiuum valorem in puncto Y, qui cum verſus C decreſcat et in F euaneſcat, vltra F neceſſario negatiuum valorem induit et in ipſo puncto C abit in -90°.

§. 16.

§. 16. Porro manifeſtum eſt curuam iterum per axem fore tranſituram, quoties fuerit $2\psi = \text{tang.}\,\psi$. Infiniti autem dantur valores anguli ψ intra $\psi = 0$ et $\psi = 90°$, quibus hoc euenit; vnde perſpicuum eſt curuam eſſe Spiralem a puncto illo fixo A per infinitos gyros continuo longius recedentem, cuius igitur radius osculi, vt et diſtantia a puncto A, continuo creſcit, donec tandem, vbi $\psi = 90°$, in infinitum abit; tum autem tam angulus Φ quam longitudo curuae etiam infiniti erunt. Quo omnia haec clarius intelligantur, in ſequenti tabula angulum Φ et diſtantiam z pro aliquot anguli ψ valoribus exhibeamus.

ψ		Φ	z
0°	+	0°, 0′	0, 500. a
20	—	19, 9	0, 566. a
40	—	31, 55	0, 852. a
60	—	20, 46	2, 000. a
70	+	17, 25	4, 274. a
75	+	63, 50	7, 464. a
80	+	164, 56	16, 582. a
82	+	243, 41	25, 815. a
84	+	377, 8	45, 763. a
86	+	647, 23	102, 760. a
88	+	1464, 45	410, 520. a
90		∞	∞

§. 17. Superfluum foret hanc tabulam vlterius continuare: ex allatis enim iam abunde apparet, valores anguli ψ, quibus curua per axem tranſit, continuo fieri copioſiores. Prima autem tranſitus per axem momenta ſunt ſequentia:

Si

Si $\psi = 0$	erit $\phi = 0$	et $z = 0,500.a$
$\psi = 66°\,45'$	.. $\phi = 0$	.. $z = 3,209.a$
$\psi = 80,28$	.. $\phi = 180°$	.. $z = 18,228.a$
$\psi = 83,52$	.. $\phi = 360°$	.. $z = 43,802.a$
$\psi = 85°,23\frac{1}{2}$	.. $\phi = 540°$	.. $z = 77,463.a$

Curuae igitur initium, ob primos anguli ϕ valores negatiuos, formam habebit C F H M in figura tertia expreſſam, vbi ſcilicet $AC = \frac{1}{2}a$; $AF = a$; $AH = 3,209.a$; $AM = 7,464.a$ et anguli $BAF = -32°,42'$ et $BAM = +63°,50'$. Tab. II. Fig. 3.

§. 18. Expreſſiones autem illae pro angulo ϕ et diſtantia z ita ſunt comparatae, vt haud difficulter geometrice conſtrui queant, id quod ita oſtenditur: Centro A, radio $AE = a$, deſcribatur circulus D E F, isque ope fili, in extremitate E ſtilum gerentis, euoluatur in curuam E R, cuius radius osculi in puncto R erit recta R D circulum in puncto D tangens. Quodſi iam, ducta recta A R, vocetur angulus $DAR = \psi$, erit recta $DR = a\,\text{tang.}\,\psi$, ideoque etiam arcus euolutus $EGD = a\,\text{tang.}\,\psi$, conſequenter angulus $EAD = \text{tang.}\,\psi$. Porro ex R ducatur recta R I, circulum tangens in puncto I, eritque etiam angulus $IAR = \psi$, conſequenter $DAI = 2\psi$, vnde colligitur angulus

$$BAI = DAI - DAE = 2\psi - \text{tang.}\,\psi,$$

ideoque $BAI = -\phi$. Biſecetur iam recta AR, in K, et ob $AR = a\,\text{ſec.}\,\psi = \frac{a}{\text{coſ.}\,\psi}$, erit $AK = \frac{a}{2\,\text{coſ.}\,\psi}$. Vnde ſi ex puncto K erigatur recta K Y normalis in A R, quae rectae A I productae occurrat in Y, erit recta

$$AY = RY = \frac{AK}{\text{coſ}\ KAY} = \frac{a}{2\,\text{coſ.}\,\psi^2} = z.$$

Hoc igitur modo formulae illae pro conſtructione curuae inventae geometrice ſunt aſſignatae.

§. 19. Ipſa autem curuae conſtructio ad mechanicam deſcriptionem reuocetur ſequenti modo. Cum punctum Y in curua quaeſita ita determinetur, vt ſit angulus $BAY = \Phi =$ tang. $\psi - 2\psi$ et diſtantia $AY = z = \frac{a}{2 \cos. \psi^2}$; manifeſtum eſt punctum Y, in quarta figura eſſe punctum in noſtra curua problemati ſatisfaciente, cuius initium C reperitur, ſi ponatur $\psi = 0$, quo caſu ſit $\Phi = 0$ et $z = \frac{1}{2} a$. Vnde ſi radius AE circuli DEF biſariam ſecetur in puncto C, erit C curuae initium. Ducta porro recta YR, in eamque normali YT, quia $YR = YA = z$ et angulus $AYR = 180^\circ - 2\psi$, erit angulus $AYT = 90^\circ - AYR = 2\psi - 90^\circ = \theta$, ideoque YT tangens et YR radius oſculi curuae CY, qui ob angulum $KRY = KAY = \psi$ et $DRA = 90^\circ + \psi$, ad radium oſculi DR curuae ER erit normalis; vnde manifeſtum eſt curvam illam CYH eſſe ex euolutione curuae ER natam. Curvae igitur quaeſitae Euoluta ſecunda eſt circulus, centro A, radio a deſcriptus, ex qua memorabili proprietate ſequens fluit curuae deſcriptio. Circulus DEF, puncto dato A tanquam centro deſcriptus, euoluatur in curuam ER, cui ſi addatur pars radii dimidia EC, eique filum circumplicetur ab R vsque in C protenſum, ex euolutione huius curuae CER naſcetur curua CFY hac proprietate praedita, vt eius radius oſculi vbique aequalis ſit rectae YA, hoc eſt diſtantiae puncti curuae a centro circuli A, vti in problemate requiritur. Manifeſtum autem eſt hanc curuam eſſe Spiralem.

Tab. II. Fig. 4.

§. 20. Quod denique longitudinem arcus curuae s attinet, ei determinandae expreſſio ſupra §. 12. data, ob $1 - nn = 0$, ideoque ambo membra infinita, accommodata non eſt. Regrediendum igitur eſt ad ipſum elementum arcus ∂s, quod caſu praeſente $n = 1$ ita exprimitur: $\partial s = \frac{a \partial \psi}{2 \cos. \psi^4}$, vnde integrando

colli-

colligitur ipſe arcus $s = \frac{1}{2} a \int \frac{\partial \psi}{cos. \psi^4}$. Ponatur tang. $\psi = u$, eritque coſ. $\psi^2 = \frac{1}{1 + uu}$ et $\frac{\partial \psi}{cos. \psi^2} = \partial u$, ergo

$$\int \frac{\partial \psi}{cos. \psi^4} = \int \partial u (1 + uu) = u + \frac{1}{3} u^3,$$

ideoque

$$s = \frac{1}{2} a \text{ tang. } \psi + \frac{1}{6} a \text{ tang. } \psi^3,$$

ſiue ob $z = \frac{a}{2 cos. \psi^2}$, ideoque tang. $\psi = \frac{\sqrt{(2az - aa)}}{a}$, habebimus

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{(2az - aa)} + \frac{(2az - aa)^{\frac{3}{2}}}{6aa}.$$

Hinc igitur patet hanc curuam eſſe rectificabilem, id quod ideo potiſſimum notari meretur, quod circulus, huic problemati aeque ſatisfaciens, non ſit rectificabilis, ideoque in noſtra ſolutione, quantumuis generali et nulla reſtrictione limitata, non contineri videatur. Interim tamen in ipſa expreſſione pro elemento arcus circulus continetur. Nam ſi ∂s per z exprimamus, erit $\partial s = \frac{z \partial z}{\sqrt{(2az - aa)}}$, vnde poſito $a = 0$ foret $\partial s = \infty$, niſi ſtatuatur $\partial z = 0$, vnde fit $z = c$, hoc eſt $\sqrt{(xx + yy)} = c$, aequatio pro circulo; tum autem fit $\partial s = \frac{0}{0}$, in quo ipſo continetur explicatio paradoxi initio memorati, quod curua, cuius radius oſculi vbique diſtantiae a puncto fixo aequatur, ſit rectificabilis, etiamſi circulus huic problemati aeque ſatisfaciens rectificari nequeat.

Euolutio ſecundi caſus
quo $n < 1$.

§. 21. Pro hoc caſu ſupra inuenimus

$$\Phi = C - 2\psi + \frac{2}{\sqrt{(1 - nn)}} \text{ A tang. } [\sqrt{(\frac{1-n}{1+n}} \text{ tang. } \psi)];$$

exiſtente $z = \frac{a}{1 + n cos. 2\psi}$. Quodſi ad determinandam axis poſitionem

Tab. II. Fig. 1. tionem hic vt ſupra conſtantem arbitrariam C ita definiamus, vt euaneſcat angulus Φ poſito $\psi = 0$, erit

$$\Phi = -2\psi + \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\,\text{A tang.}\left[\sqrt{\left(\frac{1-n}{1+n}\right.}\text{tang.}\,\psi)\right],$$

ideoque $\Phi = 0$ poſito $\psi = 0$. Tum igitur punctum curuae in axe reperietur, et quidem ad diſtantiam $AC = z = \frac{a}{1+n}$; et quoniam angulus, quem curua cum recta AY conſtituit, eſt $TYA = \theta$, ob $\theta = 2\psi - 90°$ hoc caſu erit $\theta = -90°$, hoc eſt curua in puncto C axi normaliter inſiſtit et radius oſculi in hoc loco erit $CE = n \cdot CA = \frac{na}{1+n}$.

§. 22. Statuatur porro $\psi = 45°$, erit $\theta = 0$, hoc eſt tangens curuae YT in ipſam diſtantiam YA incidit, quod euenit in puncto F, exiſtente diſtantia huius puncti a puncto fixo $FA = a$. Tum autem euidens eſt, quoniam recta AF curuam tangit, angulum Φ in huius portionis curuae puncto F fore maximum, ſcilicet erit angulus

$$BAF = \Phi = -90° + \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\,\text{A tang.}\sqrt{\frac{1-n}{1+n}}.$$

Ceterum hic, vt ſupra, ratio patet, cur in puncto C angulus θ prodierit negatiuus, quod igitur hic vlteriore explicatione non indiget.

§. 23. Sumatur porro $\psi = 90°$, erit $\sqrt{\frac{1-n}{1+n}}\,\text{tang.}\,\psi = \infty$, ideoque

$$\text{A tang.}\left[\sqrt{\frac{1-n}{1+n}}\,\text{tang.}\,\psi\right] = 90°,$$

ergo $\Phi = -180° + \frac{180°}{\sqrt{(1-nn)}}$, qui valor anguli Φ in portione curuae ad alteram axis AB partem erit maximus. Tum autem erit $\theta = 2\psi - 90° = +90°$ atque $z = \frac{a}{1-n}$; vnde patet curuam in hoc puncto iterum ad diſtantiam eſſe normalem, diſtantiam vero et radium oſculi maximum.

§. 24.

§. 24. Denique manifeſtum eſt curuam iterum per axem A B tranſire, vbi angulus Φ euaneſcit, quod eueniet vbi fuerit

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}} \text{ A tang. } [\sqrt{\frac{1-n}{1+n}} \text{ tang. } \psi].$$

Sit angulus ψ, vbi hoc euenit, α graduum, eritque $z = \frac{a}{1+n\, cof.\, 2\alpha}$. Tab II. Fig. 5.
Curua igitur in puncto C axi normaliter inſiſtens ad diſtantiam A C $= \frac{a}{1+n}$ tranſibit per punctum F, vbi angulus

$$\text{B A F} = -\Phi = 90^\circ - \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}} \text{ A tang. } \sqrt{\frac{1-n}{1+n}},$$

et diſtantia A F $= a$; tum vero axem iterum ſecabit ad diſtantiam A H $= \frac{a}{1+n\, cof.\, 2\alpha}$, dehinc vero ſupra axem aſcendet vsque in M, exiſtente angulo B A M $= \frac{180^\circ}{\sqrt{(1-nn)}} - 180^\circ$, et diſtantia maxima A M $= \frac{a}{1-n}$, cui curua in M normaliter inſiſtit. Pro valoribus autem negatiuis anguli ψ, a $\psi = 0$ ad $\psi = -90^\circ$, orietur curua priori perfecte ſimilis et aequalis C G H N, ita vt tota curua problemati ſatisfaciens, in qua ſcilicet radius oſculi ſit multiplum n diſtantiae, exiſtente $n < 1$, erit ſpecies Lemniſcatae M H F C G H N. Cum autem angulus, quem curua cum recta A N in N conſtituit, ſit rectus, ſi intra angulum N A n = N A M, curua talis Lemniſcata deſcribatur priori ſimilis et aequalis N $h\, c\, h\, n$, hae curuae quaſi vno tractu formatae conditioni problematis ſatisfacient. Hoc modo autem tot huiusmodi portiones orientur, quot angulos M A N circa punctum A contiguos formare licet, ita vt curua tota problemati ſatisfaciens tot habeat nodos, quoties angulus M A N in 360° continetur, ideoque eo plures, quo minor fuerit numerus n.

Exemplum.

§. 25. Quo omnia haec clarius perſpiciantur, iſtam caſus $n < 1$ ſolutionem exemplo ſimpliciſſimo, ſimulque ob

affectiones ſingulares curuae inde reſultantis, memorabili illuſtremus. Ponamus hunc in finem $n = \frac{3}{5}$, fietque $\sqrt{\frac{1-n}{1+n}} = \frac{1}{2}$ et $\sqrt{(1 - nn)} = \frac{4}{5}$, hincque

$$z = \frac{a}{1 + \frac{3}{5} \text{coſ.}\, 2\psi} \quad \text{et}$$

$$\phi = -2\psi + \tfrac{5}{2} A \text{ tang. } [\tfrac{1}{2} \text{ tang. } \psi].$$

Hinc facile erit ſequentem tabulam conſtruere, quae pro diuerſis valoribus anguli ψ, a $\psi = 0$ vsque ad $\psi = 90°$, angulum ϕ et diſtantiam z exhibeat.

ψ	ϕ		z
0°	0°	0′	0, 625. a
10	— 7	25	0, 639. a
20	— 14	13	0, 685. a
30	— 19	45	0, 769. a
40	— 23	5	0, 906. a
50	— 23	3	1, 116. a
60	— 17	45	1, 428. a
70	— 5	8	1, 850. a
80	+ 16	25	2, 292. a
90	+ 45	0	2, 500. a

Tab. II. Fig. 6.

§. 26. Si hanc tabulam pro valoribus anguli ψ vltra 90° continuare vellemus, iidem prodirent valores pro angulo ϕ et diſtantia z, eademque lege decreſcentes, qua creuerant a $\psi = 0$ ad $\psi = 90°$; ita vt eadem plane curua inde reſultaret C F H M, quam nobis praebuere valores in hac tabula traditi, vbi ſcilicet angulus B A F = 23°, 35′; angulus B A N = 45° et diſtantiae A C = 0, 625. a; A F = a; A H = 1, 978. a (ob angulum $\alpha = 72°, 50'$) et A N = 2, 500. a. Valores autem negatiui pro angulo ψ, a 0 vsque ad — 90°, praebent cur-

curuam priori perfecte ſimilem et aequalem C G H N. Cum autem rectae A M et A N angulum rectum inter ſe conſtituant, ſi eae producantur vsque in m et n, et intra ſingulos angulos rectos hoc modo oriundos M A N, M A n, n A m, m A N, talis curua deſcribatur, orietur curua in ſe rediens, vnoque quaſi manus tractu deſcripta, quatuor diametris M m, N n, B b, P p, totidemque nodis praedita, quae hac proprietate gaudebit, vt radius oſculi in quolibet eius puncto aequetur parti quintae ter ſumtae diſtantiae puncti curuae a puncto medio A. Haecque curua diametris in punctis C, c, Γ. γ nec non in punctis M, m, N, n normaliter inſiſtit: vbi notetur eſſe

$$AC = Ac = A\Gamma = A\gamma = 0,625.\ a$$
$$AH = Ah = AK = Ak = 1,978.\ a$$
$$AM = Am = AN = An = 2,500.\ a$$

exiſtente $a = AF$.

Euolutio tertii caſus.
quo $n > 1$.

§. 27. Hoc caſu noſtra ſolutio problematis his aequationibus continetur:

$$z = \frac{a}{1 + n\ \text{coſ.}\ 2\psi}\ \text{et}$$

$$\Phi = C - 2\psi + \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\ l\frac{1 + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\ .\ \text{tang.}\ \psi}{1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\ .\ \text{tang.}\ \psi},$$

vnde ſi, vt caſibus praecedentibus, conſtans C ita determinetur, vt angulus Φ euaneſcat, poſito $\psi = 0$, erit $C = 0$, ideoque

$$\Phi = -2\psi + \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\ l\frac{1 + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\ .\ \text{tang.}\ \psi}{1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\ .\ \text{tang.}\ \psi},$$

ideoque

ideoque $\Phi = 0$ poſito $\psi = 0$. Hoc autem caſu punctum curuae in ipſo axe AB reperietur in puncto C, exiſtente eius diſtantia a puncto fixo $AC = \frac{a}{1+n}$. Tum vero erit angulus

$$TYA = \theta = 2\psi - 90^\circ = -90^\circ.$$

Curua igitur iſta etiam in C axi AB normaliter inſiſtit.

§. 28. Statuatur nunc $\psi = 45^\circ$, eritque $\theta = 0$, hoc eſt tangens curuae CT incidit in ipſam diſtantiam YA, id quod euenit in puncto curuae F, vbi recta $AF = a$ eſt tangens curuae et angulus BAF maximus, ſcilicet

$$BAF = -90^\circ + \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\, l\, \frac{1+\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}}{1-\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}}.$$

§. 29. Quodſi autem hic ſtatuere vellemus $\psi = 90^\circ$, angulus Φ fieret imaginarius, ob

$$\Phi = -180^\circ + \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\, l - 1.$$

Idem euenit quoties tang. $\psi > \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$. Ante autem quam angulus Φ imaginarius euadat, is iam infinitum obtinuit valorem, vbi ſcilicet tang. $\psi = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$, vltra quem igitur terminum angulum ψ augere non licet. Si autem fuerit tang. $\psi = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$ erit

$$n = -\left(\frac{1+tang.\,\psi^2}{1-tang.\,\psi^2}\right) = -\frac{1}{cof.\,2\psi},$$

vnde fit $z = \infty$. Statim autem ante hunc terminum tang. $\psi = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$. angulus Φ et diſtantia z pro quam minimis anguli ψ incrementis vehementer increſcunt, et prior ad continuo plures revolutiones aſſurgit; vnde patet, etiam hanc curvam fore, vti caſu $n = 1$, Spiralem per infinitos gyros continuo longius a puncto A recedentem, cuius igitur radius oſ-

culi

culi et diſtantia a puncto A continuo creſcunt, donec tandem, vbi tang. $\psi = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$, vnus et altera in infinitum abeunt. Curua autem iſta per axem A B tranſibit, quoties fuerit

$$2\psi = \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\, l\, \frac{1 + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\ \text{tang.}\ \psi}{1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\ \text{tang.}\ \psi},$$

id quod, vti ex modo allatis apparet, infinities euenire poteſt.

Exemplum.

§. 30. Quo etiam hunc caſum $n > 1$ exemplo, et quidem ſimpliciſſimo illuſtremus, ponamus $n = \frac{5}{4}$, eritque $\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = \frac{1}{3}$, et $\sqrt{(nn-1)} = \frac{3}{4}$, ideoque diſtantia

$$z = \frac{a}{1 + \frac{5}{4}\,\text{coſ.}\ 2\psi} \text{ et}$$

$$\Phi = -2\psi + \tfrac{4}{3}\ \text{log. hyp.}\ \frac{3 + \text{tang.}\ \psi}{3 - \text{tang.}\ \psi},$$

ſiue $\Phi = -2\psi + \frac{4}{3}$ log. hyp. A, poſito breuitatis gratia $\frac{3 + \text{tang.}\ \psi}{3 - \text{tang.}\ \psi} = A$. Quo iſta expreſſio ad calculum commodior reddatur, conuertatur eius ſecundum membrum in arcum et per minuta prima exprimatur, quo facto erit

$$\Phi = -2\psi + \frac{14400}{\pi}\ \text{log. hyp. A}.$$

Denotante autem e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, erit

$$\text{log. hyp. A} = \frac{\text{log. tab. A}}{\text{log. tab. } e} = \frac{\text{log. tab. A}}{0,43429},$$

vnde ſi breuitatis gratia ponatur $\frac{14400}{0,43429\,\pi} = k$, habebitur $\Phi = -2\psi + k\,l\,A$. Hoc modo logarithmi hyberbolici vel naturales ad logarithmos tabulares ſunt reuocati, ſimulque omnia ad calculum praeparata; vnde facile erit pro praecipuis anguli ψ valoribus, à $\psi = 0$ vsque ad $\psi = 71°, 33', 54\frac{1}{3}''$, vbi fit $\Phi = \infty$ et $z = \infty$, valores anguli Φ et diſtantiae z computare, quos in ſequenti tabula ob oculos ponemus.

ψ	k/A		Φ			z
0°	0°,	0′		0°	0′	0, 444. a
10	8	59	—	11	1	0, 460. a
20	18	38	—	21	22	0, 511. a
30	29	46	—	30	14	0, 615. a
40	43	54	—	36	6	0, 822. a
45	52	57	—	37	3	1, 000. a
50	64	14	—	35	46	1, 277. a
60	100	37	—	19	23	2, 667. a
62	112	30	—	11	30	3, 322. a
64	127	39	—	0	21	4, 340. a
66	148	11	+	6	11	6, 112. a
68	179	7	+	43	7	9, 918. a
70	238	44	+	98	44	23, 557. a
71, 30′	479	12	+	336	12	586, 17. a
71, 31	501	43	+	358	41	788, 03. a
71, 32	533	53	+	390	49	1203, 4. a
71, 33	590,	42	+	447	36	2537, 5. a
71°, 33′, 54″$\frac{1}{3}$	∞			∞		∞

§. 31. Ex hac tabula iam luculenter perſpicitur, quod iam ſupra obſeruauimus, angulum Φ et diſtantiam z circa vltimum terminum angulo ψ praeſcriptum vehementer increſcere; ſimulque ope huius tabulae curuam accuratiſſime delineare licet, quo autem labore eo potius ſuperſedere poterimus, quod, quae circa naturam et figuram curuae in genere per hoc exemplum nobis innotuere, pro noſtro ſcopo prorſus ſufficiunt. Progrediamur igitur ad tractationem caſus generalioris alteri quo radius osculi poteſtati diſtantiae proportionalis aſſumitur.

II. Euo-

II. Euolutio caſus
quo radii osculi tenent rationem poteſtatis cuiuscunque diſtantiae.

§. 32. Hoc igitur caſu erit primo ex §. 5. $\int \frac{z\,\partial z}{Z} = t$, vnde poſito $Z = n z^m$ fiet

$$\tfrac{1}{n}\int z^{1-m}\,\partial z = \frac{z^{2-m}}{n(2-m)} = t.$$

Hic ſcilicet conſtantem negligere ſumus coacti, quo quidem generalitas ſolutionis huius poſterioris caſus haud mediocriter reſtringitur; verum ſi hic conſtantis rationem habere vellemus, per calculos taedioſiſſimos perueniremus ad curuas maxime tranſcendentes; contra vero, neglecta conſtante, prodibunt curvae algebraicae problemati ſatisfacientes, quas accuratius conſideraſſe operae pretium erit.

§. 33. Ponatur nunc breuitatis gratia $t = \frac{a^{\lambda+1}}{z^{\lambda}}$, ita vt ſit $a^{\lambda+1} = \frac{1}{n(2-m)}$ et $\lambda = m - 2$, eritque ex §. 7. elementum $\partial \Phi = \frac{a^{\lambda+1}\,\partial z}{z\sqrt{(z^{2\lambda+2} - a^{2\lambda+2})}}$, quae expreſſio, poſito $\lambda + 1 = m - 1 = \mu$, in hanc concinniorem transfunditur: $\partial \Phi = \frac{a^{\mu}\,\partial z}{z\sqrt{(z^{2\mu} - a^{2\mu})}}$, ad quam vlterius ſimplificandam ponatur $z^{\mu} = \frac{a^{\mu}}{v}$, eritque $\partial \Phi = \frac{v\,\partial z}{z\sqrt{(1-vv)}}$.

§. 34. Pro eliminanda variabili z notetur ob $z^{\mu} = \frac{a^{\mu}}{v}$, fore $\mu\, l z = \mu\, l a - l v$, ideoque differentiando $\frac{\mu\,\partial z}{z} = -\frac{\partial v}{v}$,

conſequenter $\mu \partial \phi = - \frac{\partial v}{\sqrt{(1 - v v)}}$, vnde integrando colligitur $\mu \phi =$ A coſ. v, hincque $v = \frac{a^\mu}{z^\mu} =$ coſ. $\mu \phi$. Aequatio igitur naturam curuae exprimens, cuius radius oſculi in ſingulis punctis proportionalis eſt poteſtati m^{mae} diſtantiae a puncto fixo erit $z^\mu = \frac{a^\mu}{\text{coſ.}\ \mu \phi}$, ſiue

$$z = \frac{a}{\sqrt[m-1]{\text{coſ.}\ (m-1)\phi}},$$

vnde pro quolibet angulo ϕ datur diſtantia z, id quod pro curua conſtruenda prorſus ſufficit.

Tab. I. Fig. 5. §. 35. Sit A B axis curuae quaeſitae et A punctum fixum, et cum, poſito angulo $\phi = 0$, ſit $z = a$, manifeſtum eſt curuam in C per axem tranſire ad diſtantiam A C $= a$, dehinc vero aſcendere et creſcente angulo ϕ continuo longius ab axe et puncto A recedere, donec tandem, vbi angulus $\phi = \frac{90}{m-1}$ diſtantia z euadat infinita.

§. 36. Introducamus, vt ſupra, angulum quem curvae tangens Y T cum diſtantia A Y conſtituit, ponendo Y T $= \theta$, eritque A T $= t$ et ſin. $\theta = \frac{\text{A T}}{\text{A Y}} = \frac{t}{z} = \frac{a^{m-1}}{z^{m-1}}$. Hinc ſi $\phi = 0$ et $z = a$, erit ſin. $\theta = 1$, ergo $\theta = 90°$, vnde diſcimus etiam hanc curuam in puncto C axi normaliter inſiſtere; tum vero, poſito $\phi = \frac{90°}{m-1}$ et $z = \infty$, erit ſin. $\theta = 0$, ergo $\theta = 0$; vnde intelligitur, curuam ad diſtantiam infinitam cum recta A P coincidere, exiſtente angulo B A P $= \frac{90°}{m-1}$, ita vt haec recta A P exhibeat tangentem curuae in puncto ab A infinite

infinite remoto, ſeu Aſymptotum. Ceterum manifeſtum eſt ad alteram axis partem curuam exiſtere debere curuae C Y M perfecte ſimilem et aequalem, eademque proprietate gaudentem, ita vt tota curua M C N intra Aſymptotos A P et A Q incluſa problemati ſatisfaciat, exiſtente angulo P A Q $= \frac{180^\circ}{m-1}$.

§. 37. Ex relatione inuenta inter angulum Φ et diſtantiam z facile aequatio inter coordinatas A X $= x$ et X Y $= y$ deducitur, id quod, licet nullius vſus in noſtra ſolutione ad tam ſimplicem aequationem perducta, hic breuiter oſtendiſſe non pigebit. Cum igitur inuenerimus $z^\mu \operatorname{coſ.} \mu\Phi = a^\mu$, notetur eſſe

$$2 \operatorname{coſ.} \mu\Phi = (\operatorname{coſ.}\Phi + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.}\Phi)^\mu + (\operatorname{coſ.}\Phi - \sqrt{-1} \operatorname{ſin.}\Phi)^\mu.$$

Eſt vero $\operatorname{coſ.}\Phi = \frac{x}{z}$ et $\operatorname{ſin.}\Phi = \frac{y}{z}$, ergo

$$2 \operatorname{coſ.} \mu\Phi = \frac{(x+y\sqrt{-1})^\mu + (x-y\sqrt{-1})^\mu}{z^\mu}, \text{ ſiue}$$

$$2 z^\mu \operatorname{coſ.} \mu\Phi = 2a^\mu = (x+y\sqrt{-1})^\mu + (x-y\sqrt{-1})^\mu.$$

Facta autem horum binomiorum euolutione in ſeries, cum habeatur

$$(x+y\sqrt{-1})^\mu = x^\mu + \tfrac{\mu}{1} x^{\mu-1} y\sqrt{-1} - \tfrac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2} y^2 + \text{etc.}$$

$$(x-y\sqrt{-1})^\mu = x^\mu - \tfrac{\mu}{1} x^{\mu-1} y\sqrt{-1} - \tfrac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2} y^2 - \text{etc.}$$

earum ſumma dabit

$$a^\mu = x^\mu - \tfrac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2} y^2 + \tfrac{\mu \ldots (\mu-3)}{1.2.3.4} x^{\mu-4} y^4 \text{ etc.}$$

quae progreſſio ſemper abrumpitur, quoties μ, vel etiam m, fuerit numerus integer poſitiuus.

§. 38. Hic autem ſtatim ſe offerunt duo caſus ſpeciales, quos ope formularum modo traditarum tractare non licet, ſcilicet caſus $m = 1$ et $m = 2$, quos cum nonnullis aliis in ipſa noſtra ſolutione contentis hic coronidis loco breuiter percurremus.

 Caſus

Caſus primus.

Vbi $m = 1$.

§. 39. Statim apparet ob $\mu = 0$ aequationem illam $z^{\mu} \operatorname{coſ.} \mu \Phi = a^{\mu}$ huic caſui euoluendo accommodatam non eſſe. Sin autem regrediamur ad aequationem fundamentalem $\int \frac{z \partial z}{Z} = t$, ob $Z = n z$ naſcetur aequatio $t = \frac{z - a}{n}$ iam ſupra in omni extenſione §. 8. et ſeqq. tractata, vbi igitur hic diutius non immoramur.

Caſus ſecundus.

Vbi $m = 2$.

§. 40. Hoc igitur caſu foret $a = \infty$, vnde patet, eius ſolutionem quoque ex ſolutione generali haurire non poſſe. Coacti igitur erimus et hic ad aequationem fundamentalem reverti, quae praebet $\frac{z \partial z}{\partial t} = Z = n z^2$, vnde deducitur $\partial t = \frac{\partial z}{n z}$ ideoque $t = \frac{1}{n} l z$, quo valore in expreſſione pro elemento $\partial \Phi$ inuenta ſubſtituto habebimus $\partial \Phi = \frac{\partial z l z}{z \sqrt{n n z z - (l z)^2}}$; tum vero erit elementum arcus $\partial s = \frac{n z \partial z}{\sqrt{n n z z - (l z)^2}}$.

§. 41. Ducatur elementum arcus in n et a producto auferatur $\partial \Phi$, prodibitque fractio, cuius numerator eſt dimidium differentiale quadrati denominatoris, nam

$$n \partial s - \partial \Phi = \frac{n n z \partial z - \frac{\partial z}{z} l z}{\sqrt{n n z z - (l z)^2}},$$

vnde integrando elicitur

$$n s - \Phi = \sqrt{n n z z - (l z)^2}, \text{ ſiue}$$

$$s - \frac{\Phi}{n} = \sqrt{z z - \frac{(l z)^2}{n n}} = \sqrt{z z - t t} = \mathrm{T\,Y},$$

ergo

ergo angulus B A Y $= n$ (C Y — T Y), quae proprietas haud inelegans omnem attentionem meretur. Hic autem ſubſiſtere ſumus coacti, quoniam formula pro $\partial \Phi$ inuenta logarithmos innoluit et ita eſt comparata, vt nullo modo tractari queat.

Caſus tertius.

Vbi $m = 3$.

§. 42. Hoc igitur caſu habemus $z = \frac{a}{\sqrt{\cos. 2\Phi}}$ et angulum, quem Aſymptotus A P cum axe A B facit, B A P $= \frac{90°}{m-1} = 45°$; vnde iam intelligitur curuam eſſe Hyperbolam aequilateram, quippe quae, vti conſtat, hac proprietate eſt praedita, quod eius radius oſculi proportionalis ſit cubo diſtantiae puncti curuae a centro Hyperbolae. Progreſſio autem ſupra §. 37. data hoc caſu pro relatione coordinatarum hanc ſubminiſtrat aequationem: $a a = x x - y y$, vti rei natura poſtulat. Curua igitur hoc caſu problemati ſatisfaciens eſt Hyperbola aequilatera in figura ſexta cum ſuis ſociis expreſſa M C N, quae quatuor igitur curuae ita ſunt comparatae, vt earum radii oſculi in ſingulis punctis Y proportionales ſint cubis diſtantiae A Y a centro Hyperbolarum A. Tab. I. Fig. 6.

Caſus quartus.

Vbi $m = 4$.

§. 43. Hic erit $z = \frac{a}{\sqrt[3]{\cos. 3\Phi}}$. Hinc ſi $\Phi = 0$ erit $z = a$, et ſi $\Phi = 30°$ erit $z = \infty$: angulus igitur B A P erit 30 graduum et curua problemati ſatisfaciens Hyperbola M C N intra Aſymptotos A P et A Q, ſeſe ſub angulo P A Q $= 60°$ interſecantes, contenta. Manifeſtum autem eſt circa centrum

A

Tab. I. Fig. 7. A ſex dari huiusmodi Hyperbolas problemati ſatisfacientes in figura ſeptima exhibitas. Aequatio autem inter coordinatas hoc caſu erit tertii gradus ſcilicet $a^3 = x^3 - 3xyy$.

* * * * * * * * *

§. 44. Hac commentatione iam ad vmbilicum pene perducta deprehendi, Illuſtrem quondam Eulerum proprietatem illam §. 41. paucis tantum verbis indicatam, iam olim obſervaſſe in diſſertatione nondum typis impreſſa, cui titulus eſt: *De curuis quarum radii oſculi tenent rationem dupplicatam diſtantiae a puncto fixo, earumque mirabilibus proprietatibus*, vbi quidem ipſe formulas illas logarithmis implicatas pro genere intractabili declarat, nihilo vero minus figuram curuarum huic conditioni ſatisfacientium earumque proprietates ſingulares mira ſagacitate determinauit. In hac curua autem ab Illuſtri Eulero, deficiente Analyſi, per mera ratiocinia eruta id maxime mirum videri debet, quod duabus conſtet portionibus a ſe inuicem penitus ſeparatis, quarum prior tota in ſpatio annulari incluſa ſimillima eſt curuae noſtrae in figura quinta expoſitae pro caſu $Z = nz$, exiſtente $n < 1$, altera vero verſus punctum A concaua continuo magis ab hoc puncto recedit et in infinitum elongatur, inter quam igitur portionem et noſtram Spiralem pro eodem caſu $Z = nz$, exiſtente $n > 1$, inuentam maxima analogia cernitur.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE MOTV OSCILLATORIO TABVLAE SVSPENSAE ET A VENTO AGITATAE.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 13 *Nou.* 1775.

§. 1.

Conſideremus tabulam planam circa axem horizontalem ſuſpenſam, in quam ventus impingat ſecundum directionem horizontalem V S ſitque recta A O verticalis, axis vero circa quem tabula A S eſt mobilis, ad planum A O V normalis concipiatur; in tabula autem ſit G eius centrum grauitatis. Tum vero ponatur pondus totius tabulae $= P$, eiusque momentum inertiae reſpectu axis $A = P k k$, quod obtinetur ſi ſingula tabulae elementa per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe A multiplicentur et producta in vnam ſummam colligantur. Vocetur porro diſtantia centri grauitatis ab axe $A G = a$, pro figura autem tabulae, cuius recta A B ſit diameter, diſtantiae indefinitae $A S = s$ ponatur ſemilatitudo $= y$, ita vt ſuperficies tabulae abſciſſae A S reſpondens ſit $2 \int y \partial s$; tota vero tabulae longitudo A B ſit $= b$. Denique vocetur celeritas venti in directione $V S = c$, denotante c ſpatium quod ventus ſingulis minutis ſecundis percurrit. Tab. III. Fig. 1.

§. 2. His factis denominationibus, poſtquam ab initio elapſum fuerit tempus t minut. ſecund., teneat tabula ſitum in figura expreſſum A B, a recta verticali A O declinantem angulo O A B $= \Phi$; motus autem tabulae nunc ſit tantus, vt punctum G circa axem A gyretur in directione G g ad A G normali celeritate $= v$, ita vt ad quoduis tempus t iſtam celeritatem inueſtigari oporteat. Hinc igitur puncti cuiuscunque S ab axe diſtantis interuallo A S $= s$ celeritas erit $= \frac{vs}{a}$, cuius directio S P itidem erit ad axem normalis.

§. 3. Quoniam igitur tabula in motu verſatur, ante omnia motus reſpectiuus venti, quo in punctum tabulae S impingit, definiri debet. Hunc in finem motus ſecundum S P reſoluatur in laterales S Q et S R, illum ſcilicet horizontalem, hunc vero verticalem; et quia angulus A S R $= \Phi =$ P S Q, ob celeritatem S P $= \frac{vs}{a}$, erit celeritas S Q $= \frac{vs}{a}$ coſ. Φ et celeritas S R $= \frac{vs}{a}$ ſin. Φ; vnde patet ventum in directione horizontali S Q punctum S tantum ferire celeritate $c - \frac{vs}{a}$ coſ. Φ.

Tab. III. Fig. 2. §. 4. Referat igitur S v iſtam celeritatem reſpectivam venti horizontalem $c - \frac{vs}{a}$ coſ. Φ, et quia punctum S inſuper habet celeritatem S R $= \frac{vs}{a}$ ſin. Φ, toti ſyſtemati motus contrarius imprimi concipiatur, ſumendo S $r = \frac{vs}{a}$ ſin. Φ, et completo rectangulo S v T r, diagonalis S T tam directionem quam quantitatem celeritatis repraeſentabit, qua ventus in punctum S vt fixum ſpectatum impinget. Ponatur igitur angulus T S $r = \psi$, eritque tang. $\psi = \frac{Tr}{Sr} = \frac{ac - vs\,coſ.\,\Phi}{vs\,ſin.\,\Phi}$, et ipſa celeritas

$$ST = \sqrt{\left(cc - \frac{2cvs\,coſ.\,\Phi}{a} + \frac{vvss}{aa}\right)}.$$

Tab. III. Fig. 3. §. 5. Referat S T iſtam celeritatem modo inuentam, quae producta rectae verticali A O occurrat in puncto U, fietque

que angulus T U O $= \psi$, et ventus eodem modo punctum S feriet ac ſi veniret in directione U S celeritate

$$= \sqrt{cc - \frac{2cvs\,coſ.\,\Phi}{a} + \frac{vvss}{a}}.$$

Hinc igitur ob angulum B A O $= \Phi$, obliquitas incidentiae erit angulus A S U $= \psi - \Phi$, eius ergo tangens erit

$$= \frac{tang.\,\psi - tang.\,\Phi}{1 + tang.\,\psi\; tang.\,\Phi} = \frac{ac\,coſ.\,\Phi - vs}{ac\,ſin.\,\Phi},$$

vnde erit huius anguli ſinus

$$= ſin.\,(\psi - \Phi) = \frac{ac\,coſ.\,\Phi - vs}{\sqrt{(aacc - 2acvs\,coſ.\,\Phi + vvss)}} \text{ et}$$

$$coſ.\,(\psi - \Phi) = \frac{ac\,ſin.\,\Phi}{\sqrt{(aacc - 2acvs\,coſ.\,\Phi + vvss)}}.$$

§. 6. Iſta reſolutio etiam ſequenti modo concinnius inſtitui poteſt; reſoluatur ſcilicet ipſe motus venti VS, completo rectangulo V A S N, ſecundum directiones A S et N S, quarum haec ſit normalis in tabulam, illa autem ipſam tabulam ſtringat. Quia igitur celeritas venti V S $= c$ et angulus V S N $=$ O A S $= \Phi$, erit celeritas ſecundum A S $= c$ ſin. Φ, et celeritas ſecundum N S $= c$ coſ. Φ, quam poſteriorem punctum S quaſi effugit celeritate $= \frac{vs}{a}$, quamobrem a celeritate N S reſcindatur portio N $n =$ S P $= \frac{vs}{a}$, ac referet S $n = c$ coſ. $\Phi - \frac{vs}{a}$ hanc celeritatem, qua punctum S percutietur, quae ergo cum altera celeritate ſecundum A S $= c$ ſin. Φ iterum coniungatur, ducendo $n v$ parallelam ipſi N V. Tum enim diagonalis v S dabit motum venti reſpectu puncti S quieſcentis; nunc igitur erit S $v = \sqrt{(Sn^2 + nv^2)} = \sqrt{cc - \frac{2cvs\,coſ.\,\Phi}{a} + \frac{vvss}{aa}}$, vnde ſtatim colligitur ſinus incidentiae Tab. III. Fig. 4.

$$VSA = \frac{ac\,coſ.\,\Phi - vs}{\sqrt{(aacc - 2acvs\,coſ.\,\Phi + vvss)}},$$

prorſus vt iam ante inuenimus.

 §. 7.

§. 7. Ventus igitur in punctum tabulae motae S perinde agit, ac ſi tabula quieſceret ventusque impingeret in directione vS cum celeritate $= \sqrt{cc - \frac{2cvs\,coſ.\Phi}{a} + \frac{vvss}{aa}}$, vnde totum effectum venti in tabulam determinari oportet. Olim quidem Newtonum ſequentes Geometrae ſtatuerunt in impulſione fluidi obliqua impetum ſequi rationem duplicatam ſinuum; nuper autem ex experimentis Cel. Marguerie *in Mém. de l'Académ. R. de Marine* commemoratis concludendum videtur, iſtum impetum ipſi ſinui anguli incidentiae eſſe proportionalem, quam ob cauſſam motum noſtrae tabulae pro vtraque hypotheſi ſeorſim euoluamus, quo deinceps, quando experimenta inſtituentur, facilius cognoſci poſſit, vtra harum hypotheſium ad veritatem propius accedat.

HYPOTHESIS I
qua impulſio fluidi quadrato ſinus anguli incidentiae proportionalis ſtatuitur.

§. 8. Cum igitur elementum tabulae elemento abſciſſae ∂s reſpondens ſit $= 2y\partial s$, conſideremus primo vim venti, ſi cum celeritate $= u$ directe in hoc elementum quieſcens impingeret, et quia altitudo, ex qua iſta celeritas u generatur, eſt $= \frac{uu}{4g}$, denotante g altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo, vis impulſionis aequabitur ponderi cylindri aërei cuius baſis $= 2y\partial s$, altitudo vero $= \frac{uu}{4g}$, cuius ergo volumen erit $= 2y\partial s \cdot \frac{uu}{4g}$, quod ad volumen aqueum reductum, poſita grauitate ſpecifica aëris ad aquam vt 1 ad n, haec vis aequabitur ponderi voluminis aquae $= \frac{2y\partial s \cdot uu}{4ng}$. Nunc igitur quoque totum pondus tabulae P per volumen aquae aequiponderantis exprimi conueniet. Quod ſi iam ventum eadem celeritate u non directe ſed ſub angulo $= \omega$ in tabulam irruere

irruere ſumamus, eius vis in elementum tabulae $2y\partial s$ exerta erit $= 2y\partial s \cdot \frac{uu}{4ng}$ ſin. ω^2. Nunc vero pro noſtro caſu vidimus eſſe

$$uu = cc - \frac{2cvs\,\text{coſ.}\,\Phi}{a} + \frac{vvss}{aa}, \text{ atque}$$

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{ac\,\text{coſ.}\,\Phi - vs}{\sqrt{(aacc - 2acvs\,\text{coſ.}\,\Phi + vvss)}};$$

quibus valoribus ſubſtitutis prodit vis illa quaeſita

$$= \frac{2y\partial s(ac\,\text{coſ.}\,\Phi - vs)^2}{4ngaa}$$

cuius vis directio eſt S P ad tabulam A B normalis. Hic autem imprimis notari oportet, iſtam formulam tantum locum habere, quamdiu declinatio tabulae ſeu angulus O A B $= \Phi$ minor eſt angulo recto; ſi enim angulus Φ excederet $90°$, tum vis venti in tabulam non amplius ſurſum vergeret vti formula indicat, ſed ſubito in partem contrariam verteretur, quia hoc caſu ventus tabulam ab altera parte feriret, vnde cavere debemus, ne ſequentes concluſiones vltra ſitum tabulae horizontalem extendamus.

§. 9. Quo nunc hinc ipſum motum tabulae eruere queamus, quia ea circa axem A eſt mobilis, ſingularum harum virium elementarium momenta reſpectu eiusdem axis colligere debemus, quare vis elementaris inuenta ducatur in diſtantiam ab axe A S $= s$, vt obtineatur eius momentum

$$= \frac{2ys\partial s(ac\,\text{coſ}\,\Phi - vs)^2}{4ngaa},$$

vbi obſeruandum eſt in integratione huius formulae tantum interuallum s indeque pendentem ſemi-latitudinem tabulae y pro variabili tractari debere, hocque facto poſt integrationem ſtatui oportet $s = \text{A B} = b$, vt obtineatur totum momentum ex omnibus viribus elementaribus natum.

§. 10. Quia autem hinc in genere pro quauis tabulae figura nihil definire licet, tabulae tribuamus figuram rectanguli, cuius ſemi-latitudo ſit $= f$, ideoque $y = f$, et nunc formula noſtra integranda erit

$$\frac{2 f s \partial s (a a c c \, coſ. \Phi^2 - 2 a c v s \, coſ. \Phi + v v s s)}{4 n g a a},$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{c c f s s \, coſ. \Phi^2}{4 n g} - \frac{c f v s^3 \, coſ. \Phi}{3 n g a} + \frac{f v v s^4}{8 n g a a}.$$

Hinc igitur poſito $s = b$ totum hoc momentum fiet

$$\frac{b b c c f \, coſ. \Phi^2}{4 n g} - \frac{b^3 c f v \, coſ. \Phi}{3 n g a} + \frac{f b^4 v v}{8 n g a a}.$$

§. 11. Manifeſtum autem eſt hoc momentum ex vi venti natum tendere ad angulum Φ augendum, dum proprium tabulae pondus in plagam contrariam nititur. At vero totum pondus P in ipſo centro grauitatis G collectum concipere licet, cuius directio cum ſit verticalis, eius momentum reſpectu axis A erit $= P a \, ſin. \Phi$, ita vt nunc exceſſus illius momenti ſuper hoc ſit

$$\frac{b b c c f \, coſ. \Phi^2}{4 n g} - \frac{b^3 c f v \, coſ. \Phi}{3 n g a} + \frac{b^4 f v v}{8 n g a a} - P a \, ſin. \Phi,$$

quod ergo per momentum inertiae $P k k$ diuiſum praebet vim acceleratricem motus angularis; inde vero ipſa acceleratio oritur, ſi multiplicetur per $2 g$, tum enim productum aequabitur ipſi accelerationi, quae eſt $\frac{\partial \partial \Phi}{\partial t^2}$, ſumto ſcilicet elemento temporis ∂t conſtante, ex quo noſtra aequatio erit

$$\frac{\partial \partial \Phi}{\partial t^2} = \frac{b b c c f \, coſ. \Phi^2}{2 n P k k} - \frac{2 b^3 c f v \, coſ. \Phi}{3 n a P k k} + \frac{b^4 f v v}{4 n a a P k k} - \frac{2 g a \, ſin. \Phi}{k k}.$$

§. 12. In hac aequatione duae inſunt variabiles, angulus Φ et celeritas v, quae autem a ſe inuicem pendent. Cum enim v ſit celeritas in puncto G ſecundum directionem G g in diſtantia ab axe A G $= a$, celeritas angularis inde nata erit

erit $= \frac{v}{a}$, quae autem etiam eſt $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, ita vt ſit $v = \frac{a \partial \Phi}{\partial t}$; hoc ergo valore ſubſtituto nanciſcemur ſequentem aequationem differentialem ſecundi gradus

$$\frac{\partial \partial \Phi}{\partial t^2} = \frac{b b c c f \operatorname{coſ.} \Phi^2}{2 n \nu k k} - \frac{2 b^3 c f \partial \Phi \operatorname{coſ.} \Phi}{3 n \nu k k \partial t} + \frac{b^4 f \partial \Phi^2}{4 n \nu k k \partial t^2} - \frac{2 g a \operatorname{ſin.} \Phi}{k k}$$

in qua aequatione nunc duae tantum inſunt variabiles, ſcilicet angulus Φ cum tempore t.

§. 13. Quoniam hic variabilis t ſolum differentiale ∂t occurrit, ea ad differentialem primi gradus reducetur ponendo $\partial \Phi = q \partial t$, ita vt ſit $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = q$ et $\frac{\partial \partial \Phi}{\partial t} = \partial q$, ex quo fiet

$$\frac{\partial \partial \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{q \partial q}{\partial \Phi} \text{ ob } \partial t = \frac{\partial \Phi}{q};$$

quamobrem aequatio noſtra hanc induet formam

$$q \partial q = \frac{b b c c f \partial \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^2}{2 n \nu k k} - \frac{2 b^3 c f q \partial \Phi \operatorname{coſ.} \Phi}{3 n \nu k k} + \frac{b^4 f q q \partial \Phi}{4 n \nu k k} - \frac{2 g a \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi}{k k}.$$

Ponatur breuitatis gratia

$$\frac{b b c c f}{2 n \nu k k} = \alpha, \quad \frac{2 b^3 c f}{3 n \nu k k} = \beta, \quad \frac{b^4 f}{4 n \nu k k} = \gamma \text{ et } \frac{2 g a}{k k} = \delta$$

vt habeamus hanc aequationem concinniorem:

$$q \partial q = \alpha \partial \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^2 - \beta q \partial \Phi \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma q q \partial \Phi - \delta \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi.$$

Nulla autem via patet, qua integrale huius aequationis elici queat.

§. 14. Interim tamen hinc caſum euoluiſſe iuuabit, quo celeritas venti c vehementer magna exiſtit prae motu tabulae, ita vt quantitas v reſpectu c negligi queat; tum enim in prima aequatione §. 9. data loco $(a c \operatorname{coſ.} \Phi - v s)^2$ ſcribere licebit $a a c c \operatorname{coſ.} \Phi^2$, vnde calculo vt ante ſubducto termini litteris β et γ affecti praetermitti poterunt, ita vt tantum habeatur iſta aequatio:

$$q \partial q = \alpha \partial \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^2 - \delta \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi = \tfrac{1}{2} \alpha \partial \Phi + \tfrac{1}{2} \alpha \partial \Phi \operatorname{coſ.} 2 \Phi$$
$$- \delta \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi,$$

cuius integrale eſt

$$qq = \alpha \Phi + \tfrac{1}{2} \alpha \text{ſin.} 2 \Phi + 2 \delta \text{coſ.} \Phi + C,$$

hincque porro fit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sqrt{(\alpha \Phi + \tfrac{1}{2} \alpha \text{ſin.} 2 \Phi + 2 \delta \text{coſ.} \Phi + C)},$$

vbi $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ exprimit celeritatem angularem tabulae elapſo tempore $= t$. Ponamus igitur initio tabulam in ſitu verticali A O quieviſſe ita vt initio fuerit $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, et conſtans C reperietur $= - 2 \delta$, ita vt nunc habeamus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sqrt{\alpha \Phi + \alpha \text{ſin.} \Phi \text{coſ.} \Phi - 2 \delta (1 - \text{coſ.} \Phi)}.$$

Atque hinc fiet

$$\partial t = \frac{\partial \Phi}{\sqrt{(\alpha \Phi + \alpha \text{ſin.} \Phi \text{coſ.} \Phi - 2 \delta (1 - \text{coſ.} \Phi))}}.$$

Neque vero hinc tempus per quantitates in calculo receptas exprimi poteſt.

§. 15. Aſſumamus autem porro pondus tabulae tantum eſſe, vt agitationes a vento ortae ſint quam minimae, ita vt loco ſin. Φ ſcribere liceat Φ et loco coſ. Φ, 1 vel ad ſummum $1 - \tfrac{1}{2} \Phi \Phi$; hoc igitur caſu erit

$$\partial t = \frac{\partial \Phi}{\sqrt{(2 \alpha \Phi - \delta \Phi \Phi)}}.$$

Ponatur hic $\Phi = zz$ vt habeamus

$$\partial t = \frac{2 \partial z}{\sqrt{(2 \alpha - \delta zz)}} \text{ ſiue } \partial t \sqrt{\delta} = \frac{2 \partial z}{\sqrt{(\frac{2 \alpha}{\delta} - zz)}},$$

cuius integrale eſt

$$t \sqrt{\delta} = 2 \text{ A ſin.} \frac{z \sqrt{\delta}}{\sqrt{2 \alpha}} = 2 \text{ A ſin.} \frac{\sqrt{\delta \Phi}}{\sqrt{2 \alpha}},$$

ita vt ſumto $\Phi = 0$ fiat etiam $t = 0$.

§. 16. Ab initio ergo huius motus angulus Φ creſcet, donec fiat $\frac{\sqrt{\delta \Phi}}{\sqrt{2 \alpha}} = 1$ ideoque $\Phi = \frac{2 \alpha}{\delta}$; quae ergo eſt maxima ex-

excurſio tabulae a ſitu verticali, et contingit elapſo tempore $t = \frac{\pi}{\surd\delta}$; inde igitur delabetur rurſus ad ſitum verticalem, vnde rurſus ſimili modo aſcendet, et tali motu reciproco perpetuo agitabitur. Cum igitur ſit $\alpha = \frac{bbccf}{2nPkk}$ et $\delta = \frac{2ga}{kk}$, angulus maximae excurſionis erit $\Phi = \frac{bbccf}{2agnP}$; tempus autem quo hic angulus abſoluitur erit $t = \frac{\pi k}{\surd 2ga}$, quod ſimul eſt tempus vniuscuiusque oſcillationis; vbi recordandum eſt eſſe $AG = a$, $b = AB$, f ſemilatitudinem tabulae, c celeritatem venti ſeu viam ab eo minuto ſecundo percurſam, g altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo, P volumen aquae cuius pondus ponderi aquae aequatur, numerum n vero denotare quoties aqua grauior aëre, ita vt propemodum ſit $n = 850$; denique autem Pkk denotat momentum inertiae tabulae reſpectu axis ſuſpenſionis.

§. 17. In hoc motu oſcillatorio praecipue obſeruari conuenit, tempus oſcillationis neque a celeritate venti, neque a pondere tabulae pendere, ſed tantum per quantitates k et a determinari, ita vt eadem tabula perpetuo eundem motum oſcillatorium accipere debeat, ſiue ventus fuerit fortior ſiue debilior, dummodo oſcillationes maneant quam minimae: neceſſe enim eſt vt angulus Φ non aliquot gradus excedat, ſiue vt fractio $\frac{bbcc}{2ngaP}$ non ſuperet partem decimam vnitatis.

§. 18. Quo hunc motum exemplo illuſtremus, habeat tabula figuram parallelogrammi rectanguli, quae circa axem aAa ſit mobilis, in cuius medio G ſit centrum grauitatis, ita vt ſit $AB = 2AG$ ſiue $b = 2a$; tum vero ſit ſemilatitudo huius tabulae $Aa = f$ craſſities vero $= d$, eritque volumen totius tabulae $= 4afd$, vnde ſi grauitas ſpecifica tabulae ſe habeat ad aquam vt m ad 1, erit $P = 4mafd$. Hinc igitur pro momento inertiae inueniendo capiatur altitudo indefinita $AP = x$ Tab. III. Fig. 5.

S 2 ſitque

ſitque $P p = \partial x$, erit volumen elementi tabulae $M M m m = 2 d f \partial x$, eiusque maſſa $2 m d f \partial x$, quae multiplicata per quadratum diſtantiae ab axe ſcilicet $x x$ et integrata dat $\frac{2}{3} m d f x^3 = \frac{16}{3} m d f a^3$, quod cum poſitum ſit $= P k k$, ob $P = 4 m a f d$ fiet $k k = \frac{4}{3} a a$. Ex his igitur colligitur tempus vnius oſcillationis $t = \frac{2 \pi \sqrt{a}}{\sqrt{6 g}}$ in minutis ſecundis expreſſum, dummodo angulus excurſionis qui ſit $\Phi = \frac{c c}{2 m n g d}$ fuerit ſatis exiguus, veluti non ſuperans $\frac{1}{10}$.

§. 19. Manifeſtum eſt iſtum motum oſcillatorium locum habere non poſſe, niſi vel tabula fuerit tam ponderoſa vel ventus ſatis debilis, vt tabulam de ſitu verticali non vltra angulum ſatis exiguum veluti 5 graduum declinare valeat. Quod ſi ſecus eueniat et tabula a vento vsque ad angulum maiorem declinetur, tum nihilo minus etiam motus oſcillatorius locum habere poteſt, dum ſcilicet tabula circa ſitum obliquum in quo cum vento in aequilibrio foret, vltrocitroque per interualla minima agitabitur, quem motum operae pretium erit accuratius inueſtigare.

De motu oſcillatorio
quem tabula a vento impulſa recipere poteſt
in Hypotheſi I.

§. 20. Hic igitur ante omnia ex dimenſionibus tabulae, quae maneant vt ſupra ſunt conſtitutae, et vi venti definiri debet ſitus tabulae obliquus, qui ſit $A B$, in quo cum vento in aequilibrio conſiſtat. Statuatur ergo angulus $O A B = \zeta$, ita vt angulus ſub quo ventus in tabulam impingit ſit $= 90° - \zeta$; quare cum altitudo celeritati venti debita ſit $= \frac{c c}{4 g}$ et ſuperficies tabulae $= 2 b f$; vis venti tota aequabitur ponderi voluminis

Tab. III. Fig. 6.

nis aquae $= \frac{cc}{4ng} \cdot 2bf$ coſ. ζ^2, quae in puncto tabulae medio applicata eſt intelligenda, vnde eius momentum reſpectu axis erit $\frac{bbccf\,coſ.\,\zeta^2}{4ng}$. Momentum autem ponderis tabulae eſt $= Pa$ ſin. ζ, quod illi aequale poſitum dabit ſtatum aequilibrii hac aequatione expreſſum Pa ſin. $\zeta = \frac{bbccf\,coſ.\,\zeta^2}{4ng}$, vnde angulum ζ definire licebit, quem ergo tanquam cognitum ſpectabimus, ita vt hinc potius relatio reliquorum elementorum deduci queat.

§. 21. Quod ſi iam tabulam de hoc ſtatu aequilibrii a cauſſa quacunque tantillum deturbari concipiamus, ea vtique circa hunc ſitum vtrinque excurſiones quam minimas peraget, hocque modo motu oſcillatorio agitabitur, ad quem determinandum ponamus, elapſo tempore t perueniſſe in ſtatum Ab exiſtente angulo O A $b = \Phi$, et quia motus ipſius tabulae prae celeritate venti vt infinite paruus ſpectari poteſt, aequatio finalis ſupra pro acceleratione §. 11. inuenta ad hunc caſum accommodabitur, ſi ibi ponatur $v = 0$, vnde nanciſcemur ſequentem aequationem

$$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{bbccf\,coſ.\,\Phi^2}{2nPkk} - \frac{2ga\,ſin.\,\Phi}{kk}.$$

Vbi notandum eſt, angulum Φ quam minime eſſe diſcrepaturum ab angulo ζ, qui ſtatui aequilibrii conuenit, quamobrem ſi ponamus $\Phi = \zeta + \omega$, erit

$$ſin.\,\Phi = ſin.\,\zeta + \omega\,coſ.\,\zeta \text{ et}$$

$$coſ.\,\Phi^2 = coſ.\,\zeta^2 - 2\omega\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta,$$

tum vero $\partial\partial\Phi = \partial\partial\omega$ ob ζ conſtans, vnde iſta aequatio emergit:

$$\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2} = \frac{bbccf\,coſ.\,\zeta^2}{2nPkk} - \frac{bbccf\omega\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta}{nPkk} - \frac{2ga\,ſin.\,\zeta}{kk} - \frac{2ga\omega\,coſ.\,\zeta}{kk},$$

ex qua ergo aequatione ad quoduis tempus t angulum B A$b = \omega$ inueſtigare oportet.

 §. 22.

§. 22. Cum igitur ex ſtatu aequilibrii ſit

$$P a \text{ ſin. } \zeta = \frac{b b c c f \text{ coſ. } \zeta^2}{4 n g},$$

aequatio noſtra contrahetur in hanc formam ſatis concinnam:

$$\frac{\partial \partial \omega}{\partial t^2} = - \frac{b b c c f \omega \text{ ſin. } \zeta \text{ coſ. } \zeta}{n P k k} - \frac{2 g a \omega \text{ coſ. } \zeta}{k k},$$

ſiue ob $b b c c f \text{ coſ. } \zeta = \frac{4 g a \text{ ſin. } \zeta}{k k \text{ coſ. } \zeta}$ erit

$$\frac{\partial \partial \omega}{\partial t^2} = - \frac{4 g a \omega}{k k \text{ coſ. } \zeta} + \frac{2 g a \omega \text{ coſ. } \zeta}{k k} = - \frac{2 g a \omega}{k k \text{ coſ. } \zeta} (2 - \text{coſ. } \zeta^2)$$

ideoque

$$\frac{\partial \partial \omega}{\partial t^2} = - \frac{2 g a \omega}{k k \text{ coſ. } \zeta} (1 + \text{ſin. } \zeta^2),$$

quae aequatio cum conueniat omni motui oſcillatorio, ex ea ſtatim patet longitudinem penduli ſimplicis iſochroni eſſe $= \frac{k k \text{ coſ. } \zeta}{2 (1 + \text{ſin. } \zeta^2)}$.

§. 23. Ponamus breuitatis gratia $\frac{2 g a (1 + \text{ſin. } \zeta^2)}{k k \text{ coſ. } \zeta} = \lambda$, vt habeamus $\frac{\partial \partial \omega}{\partial t^2} = - \lambda \omega$, quae aequatio per $2 \partial \omega$ multiplicata et integrata praebet $\frac{\partial \omega^2}{\partial t^2} = \lambda (\alpha \alpha - \omega \omega)$, denotante $\alpha \alpha$ conſtantem per integrationem introducendam. Hinc igitur porro fiet $\partial t \sqrt{\lambda} = \frac{\partial \omega}{\sqrt{(\alpha \alpha - \omega \omega)}}$ et integrando $t \sqrt{\lambda} = A \text{ ſin. } \frac{\omega}{\alpha}$, hincque viciſſim $\omega = \alpha \text{ ſin. } t \sqrt{\alpha}$; hinc patet, tabulam ad maximam digreſſionem peruenire, vbi fit $t \sqrt{\lambda} = 90° = \frac{\pi}{2}$, ideoque elapſo tempore $t = \frac{\pi}{2 \sqrt{\lambda}}$, quod cum ſit tempus dimidiae oſcillationis, euidens eſt, tempus cuiusque oſcillationis fore

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi k \sqrt{\text{coſ. } \zeta}}{\sqrt{2 g a (1 + \text{ſin. } \zeta^2)}}$$

in minutis ſecundis expreſſum, vbi angulum ζ definiri oportet ex hac aequatione

$$P a \text{ ſin. } \zeta = \frac{b b c c f \text{ coſ. } \zeta}{4 n g}.$$

§. 24.

§. 24. Applicemus haec ad tabulam rectangularem ſupra deſcriptam, cuius altitudo erat A B $= b = 2a$, ſemilatitudo $= f$, craſſities $= d$, et grauitas ſpecifica reſpectu aquae $= m$, vnde deduximus P $= 4 m a f d$ et $kk = \frac{1}{3} aa$, ex quibus valoribus naſcitur iſta aequatio $4 m d \text{ſin.} \zeta = \frac{cc \text{coſ.} \zeta^2}{ng}$, ex qua angulum ζ quaeri oportet, vel ſi hunc angulum vt cognitum ſpectare velimus, hinc celeritatem venti iſtum angulum producentem cognoſcemus, cum ſit $cc = \frac{4mngd \text{ſin.} \zeta}{\text{coſ.} \zeta^2}$, tum autem tempus ſingularum oſcillationum erit

$$\frac{2\pi a}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\text{coſ.} \zeta}{2 g a (1 + \text{ſin.} \zeta^2)}} = \pi \sqrt{\frac{2 a \text{coſ.} \zeta}{3 g (1 + \text{ſin.} \zeta^2)}},$$

quod tempus poſito angulo $\zeta = 0$ cum eo quod ſupra §. 18. inuenimus egregie conuenit. Ceterum patet, hunc motum oſcillatorium maxime pendere a celeritate venti, quandoquidem angulus praecipue per vim venti determinatur. Praeterea vero euidens eſt, oſcillationes continuo magis fieri rapidas, quo maior prodierit angulus ζ, ac ſi fieri poſſet vt angulus ζ euaderet rectus, tempus cuiusque oſcillationis adeo euaneſceret. Quando igitur angulus ζ ſatis prope ad 90° accedit, ita vt numerus vibrationum vno minuto ſecundo editarum fiat ſatis magnus, neceſſe eſt, vt inde aliquis ſonus et ſtrepitus audiatur, prorſus vti experientia declarat.

HYPOTHESIS II.
qua impulſio fluidi ſinui anguli incidentiae proportionalis ſtatuitur.

Vbi potiſſimum motus oſcillatorius expenditur.

§. 25. Euoluamus primo formulam pro determinatione motus cuiuscunque in genere, atque manentibus omnibus vt in hypotheſi praecedente, erit vis qua elementum tabulae $2 y \partial s$ im-

impellitur

$$2y\,\partial s\,.\,\frac{uu}{4ng}\,\text{ſin.}\,\omega = \frac{2y\partial s(acc\text{oſ}.\Phi - vs)\sqrt{aacc - 2acvs\,\text{coſ}.\Phi + vvss}}{4ngaa}$$

vbi notandum eſt, hanc formulam quoque veritati conſentaneam manere, etiamſi angulus Φ vltra 90° augeatur, quoniam ob coſ. Φ negatiuum iſta vis ſponte in plagam contrariam dirigitur. Huius igitur vis momentum erit

$$\frac{2ys\partial s(ac\,\text{coſ}.\Phi - vs)\sqrt{aacc - 2acvs\,\text{coſ}.\Phi + vvss}}{4ngaa},$$

cuius autem integrale in genere multo minus quam caſu praecedente euolui poteſt. Etiamſi autem longitudinem tabulae conſtantem aſſumamus et ponamus vt ante $y = f$, nihilo minus integrale prodibit nimis perplexum, ita vt hinc circa motum tabulae in genere nihil definiri queat.

§. 26. Hanc ob rem ſtatim inueſtigationem iſtam ad motus tabulae minimos ſeu oſcillatorios accommodemus, ita vt ipſa tabulae celeritas in puncto G, quae poſita erat $= v$, pro nihilo reputari poſſit; tum autem illud momentum elementare ſumto $y = f$ erit $2fs\,\partial s\,.\,\frac{cc\,\text{coſ}.\Phi}{4ng}$, cuius integrale per totam tabulam ſumtum ponendo $s = AB = b$ erit $\frac{bbccf\,\text{coſ}.\Phi}{4ng}$, a quo momentum ex pondere natum, quod eſt P a ſin. Φ, ablatum relinquit momentum quo tabula agitatur, quod ergo erit

$$\frac{bbccf\,\text{coſ}.\Phi}{4ng} - \text{P}\,a\,\text{ſin}.\,\Phi$$

vnde conficitur, ſi per $\frac{2g}{\text{P}kk}$ multiplicemus, aequatio pro acceleratione motus, quae erit

$$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{bbccf\,\text{coſ}.\Phi}{2n\text{P}kk} - \frac{2ga\,\text{ſin}.\,\Phi}{kk},$$

quae ab aequatione ſuperioris hypotheſis pro eodem caſu tantum in eo diſcrepat, quod hic ſolus coſ. Φ adſit, cum ibi eius quadratum adeſſet.

§. 27.

§. 27. Iam ad motum oſcillatorium tabulae indagandum conſiderari oportet ſtatum aequilibrii, in quem ventus tabulam redigere valet. Sit igitur pro ſtatu aequilibrii angulus O A B $= \zeta$, vnde, cum acceleratio euaneſcere debeat, fiet

$$\frac{b\,b\,c\,c\,f\,\text{coſ.}\,\zeta}{2\,n} - 2\,g\,a\,P\,\text{ſin.}\,\zeta = 0,$$

ex qua aequatione angulus ζ facillime colligitur; reperitur enim tang. $\zeta = \frac{b\,b\,c\,c\,f}{4\,g\,n\,a\,P}$. Sin autem vt ante angulum ζ in calculo retinere velimus, pro celeritate venti inueniemus

$$c\,c = \frac{4\,g\,n\,a\,P\,\text{tang.}\,\zeta}{b\,b\,f}.$$

§. 28. Ponamus nunc tabulam de hoc ſtatu paulisper deturbari, eamque tempore $= t$ perueniſſe in ſitum A b, exiſtente angulo B $a\,b = \omega$, erit $\Phi = \zeta + \omega$, et ob ω angulum minimum habebitur

$$\text{ſin.}\,\Phi = \text{ſin.}\,\zeta + \omega\,\text{coſ.}\,\zeta, \text{ et } \text{coſ.}\,\Phi = \text{coſ.}\,\zeta - \omega\,\text{ſin.}\,\zeta,$$

Hinc igitur aequatio pro motu erit

$$\frac{\partial\,\partial\,\omega}{\partial\,t^2} = + \frac{b\,b\,c\,c\,f\,\text{coſ.}\,\zeta}{2\,n\,P\,k\,k} - \frac{b\,b\,c\,c\,f\,\omega\,\text{ſin.}\,\zeta}{2\,n\,P\,k\,k} - \frac{2\,g\,a\,\text{ſin.}\,\zeta}{k\,k} - \frac{2\,g\,a\,\omega\,\text{coſ.}\,\zeta}{k\,k}$$

quae ob $\frac{b\,b\,c\,c\,f\,\text{coſ.}\,\zeta}{2\,n} - 2\,g\,a\,P\,\text{ſin.}\,\zeta = 0$ (per hypotheſin) reducitur ad hanc:

$$\frac{\partial\,\partial\,\omega}{\partial\,t^2} = - \frac{b\,b\,c\,c\,f\,\omega\,\text{ſin.}\,\zeta}{2\,n\,P\,k\,k} - \frac{2\,g\,a\,\omega\,\text{coſ.}\,\zeta}{k\,k},$$

quae poſito pro ω valore inuento redigitur ad hanc ſpeciem ſimpliciſſimam $\frac{\partial\,\partial\,\omega}{\partial\,t^2} = - \frac{2\,g\,a\,\omega}{k\,k\,\text{coſ.}\,\zeta}$, vnde ſtatim patet longitudinem penduli ſimplicis iſochroni eſſe $= \frac{k\,k\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}$.

§. 29. Multiplicemus hanc aequationem per $2\,\partial\,\omega$ et integrando fiet

$$\frac{\partial\,\omega^2}{\partial\,t^2} = \frac{2\,g\,a}{k\,k\,\text{coſ}\,\zeta}(\alpha\,\alpha - \omega\,\omega),$$

hincque porro $\frac{\partial\,t}{k}\sqrt{\frac{2\,g\,a}{\text{coſ.}\,\zeta}} = \frac{\partial\,\omega}{\sqrt{(\alpha\,\alpha - \omega\,\omega)}}$, cuius integrale praebet

$\frac{t}{k} \sqrt{\frac{2ga}{coſ.\zeta}} = A$ ſin. $\frac{\omega}{\alpha}$, ideoque $\omega = \alpha$ ſin. $\frac{t}{k} \sqrt{\frac{2ga}{coſ.\zeta}}$. Ex aequatione autem differentiali patet, tabulam ad quietem redigi ſeu fieri $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$, vbi fit $\omega = \alpha$; tum autem erit tempus

$$t = \frac{\pi k}{2} \sqrt{\frac{coſ.\zeta}{2ga}}.$$

Hoc autem tempore abſoluitur dimidia oſcillatio, vnde tempus integrae oſcillationis prodit $= \pi k \sqrt{\frac{coſ.\zeta}{2ga}}$.

§. 30. Comparemus nunc iſtud tempus cuiusque oscillationis cum eo quod in prima hypotheſi inuenimus, quod cum fuiſſet $\pi k \sqrt{\frac{coſ.\zeta}{2ga(1+ſin.\zeta^2)}}$, patet praeſens tempus ad praecedens ſe habere vt $1 : \frac{1}{\sqrt{(1+ſin.\zeta^2)}}$, hoc eſt vt $\sqrt{(1+ſin.\zeta^2)} : 1$, vnde patet praeſenti caſu oſcillationes fore tardiores quam in hypotheſi praecedente, ſi quidem angulus ζ ſimulque ipſa tabula vtrinque fuerit eadem. Hinc igitur per experimenta explorari poterit, vtra harum hypotheſium veritati ſit conſentanea.

§. 31. Tribuamus igitur vt ante tabulae craſſitiem vniformem $= d$, eritque eius altitudo $b = 2a$ et $k = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, manente ſemi-latitudine $= f$. His poſitis pro hypotheſi prima erit tempus vnius oſcillationis $= \pi \sqrt{\frac{2a\,coſ.\zeta}{3g(1+ſin.\zeta^2)}}$, pro poſteriore vero hypotheſi hoc tempus erit $= \pi \sqrt{\frac{2a\,coſ.\zeta}{3g}}$. Ponamus iam altitudinem tabulae $2a$ aequalem eſſe $\frac{1}{3}g$, ſiue trienti altitudinis g, per quam grauia vno minuto ſecundo delabuntur, ac pro hypotheſi prima erit tempus vnius oſcillationis

$$= \tfrac{1}{3}\pi \sqrt{\frac{coſ.\zeta}{(1+ſin.\zeta^2)}} = 1,0471975 \sqrt{\frac{coſ.\zeta}{1+ſin.\zeta^2}},$$

pro poſteriore autem hypotheſi erit hoc tempus

$$= \tfrac{1}{3}\pi \sqrt{coſ.\zeta} = 1,0471975 \sqrt{coſ.\zeta}.$$

Quod ſi ergo pro ſtatu aequilibrii fuerit $\zeta = 45^\circ$, tempus vnius oſcil-

oſcillationis pro hypotheſi priore erit $\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}} = 0,71899$ min. ſec., pro altera autem hypotheſi erit hoc tempus

$$= 1,04719 \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0,88059.$$

Vnde patet, per experimenta facile decidi poſſe, vtra hypotheſis cum veritate conueniat.

§. 32. Talia experimenta autem facillime inſtitui poterunt, propterea quod neque celeritatem venti noſſe neceſſe eſt, neque pondus tabulae, eiusue grauitatem ſpecificam, dummodo tabula fuerit rectangularis et vbique habeat eandem craſſitiem; neque etiam latitudo tabulae in computum ingreditur. Ponamus igitur huiusmodi tabulam adhiberi, cuius altitudo A B ſit $= \frac{1}{3}g$, hoc eſt $= 5,208$ ped. Rhenan., quae ex axe horizontali ſuſpenſa vento directe exponatur, et quaeratur eius ſitus aequilibrii, qui a ſitu verticali declinet angulo ζ, cuius quantitas accurate menſuretur. Deinde tabula in hoc ſitu ad motum oſcillatorium incitetur, et numerus vibrationum certo tempore editarum diligenter notetur, vt inde innoteſcat tempus vnius oſcillationis, quod ſit $= \theta$ min. ſec.; quo inuento exploretur, vtrum ſit $\theta = \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{\text{coſ.}\,\zeta}{1+\text{ſin.}\,\zeta^2}}$, an vero $\theta = \frac{1}{3}\pi\sqrt{\text{coſ.}\,\zeta}$; priore enim caſu hypotheſis prior, poſteriore vero hypotheſis altera veritati conſentanea pronunciari debebit. Hicque modus tutiſſimus videtur ad quaeſtionem de vera aeſtimatione vis venti decidendam, id quod alioquin plurima elementa poſtularet, de quorum veris menſuris nunquam ſatis certos eſſe liceret.

DILVCIDATIONES IN COMMENTARIVM ILL. EVLERI DE ICTV GLANDIVM CONTRA TABVLAM EXPLOSARVM, TOM. XV. NOV. COMMENTARIORVM INSERTVM.

Auctore
IACOBO BERNOVLLI.

Conuent. exhib. d. 29 *Nouembr.* 1787.

Cum in egregia, quam titulus exhibet, diſſertatione maximus noſter Eulerus ope calculi ad diuerſas conſequentias deductus fuiſſet, quae quidem primo aſpectu ſatis paradoxae haberi poſſunt; animus mihi eſt paucis hiſce pagellis lucem huic materiae pro viribus adſpergere, conſenſumque harum conſequentiarum cum primis ſanae rationis atque mechanicae principiis ob oculos ponere. Ad id vero efficiendum, opus erit ante omnia, quam breuiſſimis fieri poterit verbis, ex dicta diſſertatione ea adferre, quae cogitationibus noſtris qualibuscunque materiam ſubſtrauere.

§. 1. Celeberrimus Auctor, quum primo caſum ſimpliciorem, quo tabula immobilis cenſetur, pertractaſſet, pergit deinde ad eum, quo eadem ſuper plano horizontali libere mobilis, atque ſecundum axem horizontalem per centrum inertiae

ertiae tranſeuntem percuſſa ponatur. A pondere glandis autem, et curuatura motus quem generat, vtpote nullius momenti, omnino ſit abſtractio. Vocatis nunc maſſa glandis $= M$, ea tabulae $= N$, craſſitie eiusdem $= a$, celeritate glandis ante ictum $= c$, ponitur elapſo tempore $= t$ minutorum ſecundorum a primo motus initio, tabulam iam eſſe promotam per ſpatium $= y$, glandem vero in eam penetraſſe ad profunditatem $= x$, vbi reſiſtentiam offendat $= R$, quae ſit functio variabilis x et conſtantium quantitatum, vt magnitudinis glandis et duritiei tabulae. Peruenit iam auctor ad hanc aequationem:

$$\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = cc - \frac{4g(M+N)}{MN} \int R \, \partial x ,$$

vbi g eſt $=$ ſpatio, quod corpus graue motu libero tempore vnius minuti ſecundi deſcribit. Cum iam $\frac{\partial x}{\partial t}$ exprimat motum relatiuum glandis ad tabulam, ſiue velocitatem, qua glans eam perforat; ſequitur, ſi valor integralis completi pro $\int \frac{R \partial x}{M}$, (cum ſcilicet poſt integrationem ponitur $x = a$,) ſtatuatur $= f$, eſſe oportere $cc > 4fg\left(\frac{M+N}{MN}\right)$, vt glans per tabulam penitus perrumpat, poſteaque adhuc celeritatem quandam conſeruet. Ponitur autem $cc = kk$, quando $= 4fg\left(\frac{M+N}{MN}\right)$.

§. 2. Porro pro celeritate tabulae $= \frac{\partial y}{\partial t}$ habetur haec aequatio:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{Mc}{M+N} - \frac{M \partial x}{(M+N) \partial t} ,$$

quae celeritas, finita percuſſione, in ratione ipſius c augebitur, quamdiu glans tabulam non penitus perrumpere valet, ita vt $\frac{\partial x}{\partial t}$ fiat $= 0$; quodſi contra c maior ſit quam k, ſic vt glandi poſt perruptam tabulam pars quaedam velocitatis ſuperſit, minuetur tabulae celeritas, quo maior fuerit c, eaque erit ma-

xima, quando $c = k$; *in quo*, ait inclytus Auctor, *non exiguum paradoxon cernitur.* Celeritas autem abſoluta glandis poſt ictum remanens erit =

$$\frac{\partial x + \partial y}{\partial t} = \frac{Mc}{M+N} + \frac{N \partial x}{(M+N)\partial t}.$$

§. 3. Vocatis deinde velocitatibus, illa tabulae = $\frac{\partial y}{\partial t} = u$, eaque glandis = $\frac{\partial x + \partial y}{\partial t} = v$, ideoque velocitate relatiua = $\frac{\partial x}{\partial t} = v - u$, ducimur ad ambas has aequationes $Mv + Nu = Mc$, et $Mvv + Nuu = Mcc - 4g\int R \partial x$; quarum prior demonſtrat principium conſeruationis quantitatis motus, poſterior vero eximium illud atque vtiliſſimum principium a Leibnitzio *virium viuarum* dictum. Conſtat enim vim viuam in corpore productam aut deſtructam aequalem ſemper eſſe integrali, cuius differentia eſt duplum producti vis motricis multiplicatae per elementum ſpatii, quod productum inſuper in $2g$ multiplicari aſſolet, vt calculus ad menſuras cognitas reuocetur: haec autem cum poſteriori aequatione apprime conueniunt, vbi vis motrix per R indicatur.

§. 4. Siquidem vero fieri poſſit, vt reſiſtentia tabulae haud ſimpliciter functioni ipſius x, ſed aliquomodo proprietate fluidi praedita, etiam quadrato celeritatis relatiuae corporis percutientis proportionalis ſit, id in integrationibus propter formulam $\int R \partial x$ maximam introduceret differentiam, qua de re Celeb. Auctor pro hac ſuppoſitione de nouo calculum inſtituit. Loco ſimplicis litterae R igitur ad exprimendam reſiſtentiam, nunc hanc adhibet formulam $R + \frac{A \partial x^2}{\partial t^2}$, vbi R adhuc eam reſiſtentiae partem ſignificat, quae functioni x eſt aequalis, A vero eſt conſtans pendens a denſitate materiae, vt magnitudine foraminis, etc. His ſtabilitis, aſſumtisque iisdem, quibus praecedenter, denominationibus, poſito vero breuitatis

ergo

ergo $\frac{4g(M+N)A}{MN} = 2\alpha$, iterum inuenitur

$\frac{M \partial x + (M+N) \partial y}{\partial t}$ ſiue $M v + N u = M c$; at

$\frac{\partial x^2}{\partial t^2}$ ſiue $(v-u)^2 = e^{-2\alpha x} [c c - 4 g (\frac{M+N}{MN}) \int e^{2\alpha x} R \partial x]$.

§. 5. Hic ſi denuo velocitas initialis glandis requiſita ad perforandam totam tabulam vocetur $= k$, ita vt, pro $x = a$, fiat $4g(\frac{M+N}{MN}) \int e^{2\alpha x} R \partial x = k k$, apparet hoc caſu celeritatem iſtam maiorem eſſe debere, quam caſu praecedenti, quo ſola reſiſtentia R in computum veniebat, ita vt pro eadem celeritate initiali c celeritas relatiua $v - u$ poſt perforatam tabulam ex duplici cauſa minor futura ſit, ob k ſcilicet maiorem, et ob fractionem $e^{-2\alpha x}$, qua $c c - k k$ hic multiplicatur. Velocitas autem tabulae $= \frac{\partial y}{\partial t} = u$ erit $= \frac{M}{M+N} (c - \frac{\partial x}{\partial t})$, ideoque maior quam praecedenti caſu, quia $\frac{\partial x}{\partial t}$ eſt minor. Celeritas denique abſoluta glandis poſt ictum erit, vt ante,

$$= \frac{\partial x + \partial y}{\partial t} = \frac{M c}{M+N} + \frac{M}{M+N} \cdot \frac{\partial x}{\partial t},$$

ideoque minor ob cauſam quam modo vidimus.

§. 6. Ex combinatis duabus aequationibus §[i] 4[ti] Auctor peruenit ad hanc:

$$M(M+N) v v + N(M+N) u u = M c c (M e^{-2\alpha x} + N)$$
$$- 4g(M+N) e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x} R \partial x,$$

ex qua porro deducit ſequentem:

$$M v v + N u u = M c c - \frac{M M c c}{M+N} (1 - e^{-2\alpha x})$$
$$- 4 g e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x} R \partial x;$$

vnde patet, inquit, diſſertationi finem ponens, *vim viuam in conflictu deperditam aeſtimandam eſſe* $=$

$$\frac{M M c c}{M+N} (1 - e^{-2\alpha x}) + 4 g e^{-2\alpha x} \int e^{2\alpha x} R \partial x;$$

quonam

quonam autem ratiocinio haec iactura concludi poſſit, nullo modo perſpicitur.

§. 7. Quod igitur primo ad illud paradoxon attinet, quod §. 2. continetur, illud ſic ſat clare explicatur. Cum pro caſu illic tractato reſiſtentia vnice ſecundum profunditatem foraminis x varietur, nec propter celeritatem minui vel augeri ponatur, eademque porro ſola illam vim efficiat, quae in tabulam agit eique motum tribuit, mirandum certe non eſt, maiorem glandis celeritatem quam k, neutiquam maiorem quoque celeritatem in tabula producere; imo ex hac conſideratione potius videri poſſet, quaecunque glandis ſit celeritas, eandem ſemper tabulae eſſe oportere; cur id autem locum non habeat, et pro maiore glandis celeritate quam ea quae littera k indicatur, minorem tabula acquirat, id explicatur conſideratione temporis. Cum enim augmentum celeritatis, quod corpus qualecunque capit, aequetur producto vis acceleratricis in elementum temporis, ita vt celeritas tabulae acquiſita exprimatur per $\int \frac{R\, \partial t}{N}$, clarum eſt caeteris paribus, quo minus ſit tempus t, durante quo reſiſtentia in tabulam agit, eo minorem eius celeritatem finalem futuram eſſe. At aeque patet, quo maiori velocitate glans in tabulam impellatur, eo breuiori tempore hanc perforari, ideoque, cum omnis reſiſtentia ab hoc momento ceſſet, eo minorem in tabula produci velocitatem. Quod ſi vero glans celeritate infinita in tabulam impingat, infinite paruum aut, quod eodem redit, nullum prorſus in ea motum ciebit, quoniam reſiſtentia per tempus ſolummodo infinite paruum ſiue nullum in eam agere poteſt, glans contra celeritate ſua initiali poſt perforatam tabulam moueri perget, quod vtrumque cum formula III. Euleri conuenit. Vis viua porro ante et poſt conflictum erit eadem $= M c c$, quod quidem cum §. 3. pugnare videtur, vbi deperditio eius per $4 g \int R\, \partial x$ exprimitur: at

at haec formula conſtans et finita eſt pro quacunque celeritate c, ideoque vt infinite parua negligitur, quando $c = \infty$.

§. 8. Hoc ratiocinium omnino quadrat pro iis tantum celeritatibus glandis initialibus, quae maiores ſint quam k, ita vt tabula ſemper penitus perforetur. Poſita enim celeritate glandis minore quam k, tempus penetrationis in tabulam, donec velocitas relatiua facta fuerit $= 0$, pro variis reſiſtentiae legibus, ipſum diuerſiſſime exprimetur; etiamſi rem minus attente conſideranti videri poſſit, id tempus omni caſu absque diſcrimine cum velocitate initiali glandis in proportione eſſe futurum. Liceat igitur hic loci aliquantisper commorari, vt caſus aliquos calculo accommodatiores euoluamus. Simplicitatis cauſa ponamus coefficientem $\frac{4g(M+N)}{MN} = 1$, vt ſit velocitas relatiua $\frac{\partial x}{\partial t} = \surd(cc - \int R\,\partial x)$. Nunc ſtatuamus pro primo caſu, reſiſtentiam eſſe conſtantem, ſiue $R = 1$; erit ſimpliciter $\int R\,\partial x = x$, et $\frac{\partial x}{\partial t} = \surd(cc - x)$, vnde $\partial t = \frac{\partial x}{\surd(cc - x)}$, et, addita debita conſtanti in integratione, vt $t = 0$, cum $x = 0$, fit $t = 2c - 2\surd(cc - x)$. Pro velocitate relatiua autem $\surd(cc - x) = 0$, idem tempus fit $= 2c$, ideoque hoc caſu proportionale celeritati initiali glandis. Mirandum igitur certe non eſt, pro maiori hac velocitate maiorem quoque tabulae acquiri, quia glandem eadem vi diutius in tabulam agere videmus.

§. 9. Tranſeamus ad alium caſum, vbi, quo magis glans in tabulam penetrat, eo maior fiat reſiſtentia, eaque proportionalis ponatur ipſi x, vt ſit $R = \frac{2x}{m}$, vbi m eſt conſtans ob homogeneitatem introducta. Sic erit $\int R\,\partial x = \frac{xx}{m}$, et celeritas relatiua $= \surd(cc - \frac{xx}{m})$, porro

$$\partial t = \frac{\partial x}{\surd (cc - \frac{xx}{m})}, \text{ et } t = \surd m \times \text{A. ſin. } \frac{x}{c\surd m}.$$

Quando autem velocitas relatiua $= 0$, fit $x = c\surd m$, vnde tunc ſimpliciter tempus $t = \surd m$, ſiue conſtans. Id quidem ſatis eſt curioſum, pro ea reſiſtentiae hypotheſi, quam hic fecimus, celeritatem relatiuam glandis eodem ſemper tempore in tabula extingui, quaecunque ea fuerit ab initio (dummodo haud maior quam k); nec tamen id cum eo pugnat, quod nobis praecipue demonſtrandum eſt. Patet enim, ex duabus glandibus diuerſis celeritatibus initialibus praeditis eam, quae celerius mouetur, eodem tempore profundius in tabulam eſſe penetraturam; ex hypotheſi igitur quouis momento maiores reſiſtentias in ea offendet, ſiue, quod eodem redit, maiores vires acceleratrices ad mouendam tabulam ciebit: vnde maximum motum in ea producet, quando celeritate initiali $= k$ fuerit praedita.

§. 10. Tertium denique caſum conſideremus, vbi reſiſtentia, creſcente x, decreſcat. Fiat $R = \frac{a - 2x}{m}$, erit $\int R\,\partial x = \frac{ax - xx}{m}$, velocitas relatiua

$$= \surd (cc - \frac{ax + xx}{m}),\ \partial t = \frac{\partial x}{\surd (cc - \frac{ax + xx}{m})} \text{ et}$$

$$t = \surd m \times l \frac{\surd m c c}{2\surd (mcc - ax + xx) + a - 2x};$$

et quando celeritas relatiua $\surd (cc - \frac{ax + xx}{m}) = 0$, tempus fit $= \surd m \times l \frac{\surd mcc}{a - 2x}$, ſiue, (quia tum $x = \frac{1}{2} a \pm \surd (\frac{1}{4} a^2 - m c^2)$, vbi certo ſignum inferius ſeligendum eſt)

$$= \surd m \times l \surd \frac{mcc}{aa - 4mcc}.$$

Hic igitur creſcente celeritate c, creſcit quoque tempus, per quod

quod velocitas tabulae acceleratur, eaque adhuc maxima ſiet, quando $c = k$. Caſu praeſenti vero erit $k = \frac{a}{2\sqrt{m}}$.

§. 11. Vt iam in curriculum redeamus, pro ſecundo caſu quem Auctor noſter ſtatuit, vbi reſiſtentia ponitur $= R + \frac{A\partial x^2}{\partial t^2}$, inuenimus §. 5. celeritatem tabulae

$$= \frac{M}{M+N}\left(c - \frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{M}{M+N}\left[c - e^{-\alpha x}\sqrt{cc - 4g\left(\frac{M+N}{MN}\right)\int e^{2\alpha x} R\,\partial x}\right]$$
$$= \frac{M}{M+N}\left(c - e^{-\alpha a}\sqrt{cc - kk}\right),$$

poſtquam tabula penitus fuerit perforata. Haec formula indicat, pro variis celeritatibus initialibus glandis celeritates tabulae plane diuerſas leges obſeruaturas eſſe ac eas, quas pro priore caſu reſiſtentiae inuenimus: (ſi modo c nunquam minor ſit quam k, vbi celeritas communis, quam tabula cum glande acquirit, adhuc erit $= \frac{M}{M+N}$). Quodſi enim $c = k$, erit celeritas tabulae $= \frac{Mk}{M+N}$; deinde creſcente paulatim celeritate c, decreſcet initio celeritas tabulae, donec fiat $= k\sqrt{(1 - e^{-2\alpha a})}$, quando c facta fuerit $= \frac{k}{\sqrt{(1 - e^{-2\alpha a})}}$. Ab hoc limite autem cum celeritate glandis initiali vna creſcere incipiet celeritas tabulae, ſic vt, quum illa fuerit $= k\left(\frac{1 + e^{-2\alpha a}}{1 - e^{-2\alpha a}}\right)$, haec denuo fiat $= \frac{Mk}{M+N}$; at inde in infinitum creſcere perget, quae nimirum fiet $= \frac{Mc}{M+N}(1 - e^{-\alpha a})$, quando $c = \infty$.

§. 12. Ratio autem, cur celeritates tabulae pro iſto ſecundo caſu tam diuerſam ab ea, quam ſupra vidimus, legem obſeruent, et cur, creſcentibus glandis celeritatibus, modo decreſcant modo creſcant, in eo quaerenda eſt, quod non indirecte tantum a celeritatibus glandis pendeant, quatenus hac

 tem-

tempus percuſſionis augent vel minuunt, ſed directe quoque, quatenus ex hypotheſi ipſa reſiſtentia ſeu vis acceleratrix augetur vel minuitur. Sic cum ea pars vis acceleratricis, quae per $\frac{A\,\partial x^2}{\partial t^2}$ exprimitur, creſcat quaſi in ratione quadrata celeritatis initialis c, tempus autem, durante quo in tabulam agit, decreſcat circiter in ratione ſimplici eiusdem c, clarum ſit, cur initio, quando c paululum ſuperat k, ratio ſimplex praeponderet rationi quadratae, celeritasque tabulae minuatur: poſtea vero celeritatibus maiora incrementa capeſſentibus, praeualeat ratio quadrata, celeritasque tabulae in infinitum augeatur.

§. 13. Pergamus iam ad §. 6., vt explicemus iacturam virium viuarum, quam ibi pro ſecundo caſu fieri cognovimus. Ante omnia autem hic leuis error calculi corrigendus eſt, ex quo etiam mutatio aliqua in formula, quae hanc iacturam continet, orietur. In §. 4. peruenimus ad binas has aequationes $M\,v + N\,u = M\,c$, et

$$(v - u)^2 = e^{-2\alpha x}\left(c\,c - 4\,g\,\tfrac{(M+N)}{M\,N}\int e^{2\alpha x}\,R\,\partial x.\right.$$

Sumendo nunc prioris quadratum, multiplicando alteram per M N, deinde vtramque addendo, fit

$$M(M+N)\,v\,v + N(M+N)\,u\,u = M\,c\,c\,(N\,e^{-2\alpha x} + M)$$
$$- 4\,g\,(M+N)\,e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}\,R\,\partial x,$$

haec, diuiſa per $M + N$, mutatur in ſequentem:

$$M\,v\,v + N\,u\,u = M\,c\,c - \tfrac{M\,N\,c\,c}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x})$$
$$- 4\,g\,e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}\,R\,\partial x,$$

vnde vera virium viuarum iactura concluditur eſſe

$$= \tfrac{M\,N\,c\,c}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) + 4\,g\,e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}\,R\,\partial x.$$

§. 14. Quaeramus autem a priori, quanta haec iactura ex ipſo virium viuarum principio eſſe debeat. Ea quidem aequa-

qualis ponenda eſt integrali, quod capitur ex 4 g multiplicato in vim motricem, (quae hic nihil aliud eſt quam reſiſtentia) et in elementum ſpatii, ſiue $= 4g\int(R + \frac{A\partial x^2}{\partial t^2})\partial x$. Eſt autem ex §. 4.

$$\frac{A\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{2MN\alpha}{4g(M+N)} \cdot e^{-2\alpha x}\left(cc - 4g\frac{(M+N)}{MN}\int e^{2\alpha x} R\,\partial x\right),$$

ideoque, ſubſtituto hoc valore, fit

$$4g\int(R + \frac{A\partial x^2}{\partial t^2})\partial x$$

$$= \int\left[4gR\partial x + \frac{2MN\alpha\partial x}{M+N} \cdot e^{-2\alpha x}\left(cc - 4g\frac{(M+N)}{MN}\int e^{2\alpha x}R\partial x\right)\right]$$

$$= C - \frac{MNcce^{-2\alpha x}}{M+N} + \int(4gR\partial x - 8g\alpha\partial x\, e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\partial x)$$

$$= C - \frac{MNcce^{-2\alpha x}}{M+N} + 4g\, e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,\partial x.$$

Conſtans autem ita determinatur, vt iactura fiat $= 0$, quando $x = 0$, ideoque $C = \frac{MNcc}{M+N}$; ſic igitur iactura inuenitur

$$= \frac{MNcc}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) + 4g\, e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,\partial x,$$

plane vt ea, habita ratione erroris calculi, a Celeb. Auctore a poſteriori inuenta fuit.

§. 15. Caeterum, quamuis valor vis viuae in conflictu conſumtae non a priori, vt fecimus, determinari, perfectusque conſenſus eius, quod a poſteriori inuentum fuerat, cum regulis principii virium viuarum oſtendi potuiſſet, nihil inde damni egregium hocce principium caperet, quippe quod, quamuis inter principia, quae vocantur *deriuata*, numerari debeat, nihilominus recto ſenſu acceptum, mathematice-verum demonſtratur, eo ipſo, quod immediate ex primis motus principiis per conſequentias legitimas deriuatur.

ESSAI

SUR

UNE NOUVELLE MACHINE HYDRAULIQUE, PROPRE À ÉLEVER DE L'EAU, ET QU'ON PEUT NOMMER MACHINE PITOTIENNE.

Par

JACQUES BERNOULLI.

Préſenté à l'Académie le 15 *Mai*, 1788.

§. 1.

L'année paſſée je lus dans les gazettes litéraires de Goettingue l'annonce d'un petit traité, imprimé à Milan, & contenant la déſcription d'une nouvelle machine, nommée *ventilateur hydraulique*, à laquelle ſon Auteur, M. Caſtelli, attribuoit de grands avantages ſur les autres machines de ce genre. Ces avantages devoient ſe fonder ſur le calcul, auſſi bien que ſur des expériences faites par l'Auteur. La conſtruction de la machine d'après le court expoſé des Nouvelliſtes, (car quelque deſir que j'en aye eu, je n'ai pas été à-même de me procurer le traité) conſiſte dans un cylindre poſé verticalement, à l'axe duquel eſt adapté vers la partie inferieure un ventilateur ſemblable à ceux, dont on ſe ſert dans les ſoûterrains ou dans les

les maiſons pour purifier l'air. A la partie ſupérieure de l'axe ſe trouve un levier horizontal, qu'on tourne de façon, que l'eau, dans laquelle on ſuppoſe que le ventilateur eſt plongé, eſt obligée de monter dans le cylindre, & de s'écouler enfin par en-haut, ſi l'axe eſt tourné par le moyen du levier avec la viteſſe néceſſaire.

§. 2. La machine me paroiſſoit ſi ſimple & ſi ingénieuſe, que ne pouvant, comme je l'ai déja dit, lire le calcul & les experiences de l'Auteur, je fus curieux d'eſſayer moi-même le calcul de l'effet qu'elle pouvoit produire. Mais dés que je fus venu à conſidérer l'action des palettes du ventilateur contre l'eau, dans laquelle il eſt plongé, je m'apperçus bien, que quelque théorie que je tentaſſe d'appliquer, elle s'éloignoit ſi fort de la verité, & qu'on pourroit ſi peu ſe fier aux réſultats, que j'abandonnai entiérement ce calcul, comme juge incompétent dans cette matière, ſur laquelle il me ſembloit, que les expériences ſeules pouvoient répandre une clarté ſuffiſante. On ſait en effet, que toutes les régles, qu'on a données jusqu'ici ſur le choc oblique des fluides, ſont fort peu d'accord avec l'expérience; & mon Oncle, qui dans ſon Hydrodynamique & dans divers Mémoires des anciens Commentaires de notre Académie, a donné le premier la vraie théorie du choc direct des fluides contre des plans très grands, a reconnu l'impoſſibilité d'en donner une bonne ſur le choc oblique, & ſur celui qui ſe fait contre des corps plongés dans le fluide. Si jamais cependant nous pouvons eſpèrer d'apprendre quelque choſe de ſatisfaiſant ſur une matière auſſi intéreſſante & auſſi importante, c'eſt ſans doute encore avant la fin de la Decade courante, puisque les principaux Phyſiciens de l'Europe ont été invités à concourir pour l'honneur du

prix

prix propoſé ſur ce ſujet pour l'année 1789 par l'Académie Royale des Sciences de Paris.

§. 3. Ce ventilateur au reſte m'a fait venir l'idée d'une autre machine, fondée pourtant ſur des principes abſolument différens, & qui donne plus de priſe au calcul. Je me propoſe d'expoſer au lecteur le calcul de l'effet qu'elle peut produire, abandonnant à d'autres d'apprécier ſes avantages ou déſavantages relativement à d'autres machines de ce genre, & les moyens de l'introduire dans la pratique, ſi elle excitoit aſſés d'attention, pour qu'on voulut en faire l'épreuve.

§. 4. Voici d'abord le principe, ſur lequel toute la machine repoſe, & à cauſe duquel on pourroit lui donner le nom de *Pitotienne*. Chacun connoit le tube de Pitot, inventé pour meſurer la viteſſe de l'eau d'un fleuve ou d'un canal. Si la partie verticale de ce tube étoit aſſés courte, & la viteſſe de l'eau conſidérable, ou bien pour nous exprimer algebriquement avec plus de préciſion, en appellant la viteſſe de l'eau $= v$, la hauteur verticale du tube $= a$, & l'eſpace décrit librement par un corps grave dans le tems d'une ſeconde $= g$, ſi l'on avoit $v > 2 \sqrt{g\, a}$, il eſt clair que l'eau s'écouleroit par en-haut, & que la même choſe arriveroit, ſi l'eau étant tranquille, le tube étoit mû dans l'eau avec cette même viteſſe. Voici donc un moyen tout trouvé pour élever de l'eau, & il ne s'agit que de convertir le mouvement progreſſif du tube en un mouvement rotatoire autour d'un axe fixe, (puisque naturellement la machine doit toûjours reſter à la même place), pour avoir une machine hydraulique, qui puiſſe ſervir pour la pratique.

§. 4.

§. 4. Pour faire maintenant le calcul de cette machine dans toute la généralité qu'on peut demander, je regarderai un tube quelconque C M D, qui s'elève en ſerpentant autour de l'axe vertical immobile A B. La ligne A E répréſente un levier horizontal, auquel la puiſſance qu'on employe, eſt appliquée, pour faire tourner le tube autour de l'axe. Le tube au reſte eſt affermi de manière à ne pouvoir trébucher ni prendre d'autre mouvement que le mouvement rotatoire, dont nous avons parlé. Le bout inférieur du tube en D eſt horizontal & perpendiculaire au rayon B D, parceque de cette façon la machine agit avec le plus grand avantage pour engloutir le fluide, & qu'il feroit inutile d'embarraſſer d'avantage le calcul, en prenant au lieu de cette direction une direction quelconque. Quoique la viteſſe, avec laquelle le fluide s'écoule en C, devienne dans peu à-peu-près conſtante, puisque la viteſſe rotatoire du tube ou celle de la puiſſancé appliquée en E doit naturellement être regardée comme telle, nos formules s'appliqueront cependant également au cas, où elle feroit regardée comme variable; je ſuppoſerai auſſi au tube une amplitude inégale quelconque, mais je ferai abſtraction de l'inertie de la maſſe du tube même, puisque cette inertie ne peut avoir quelque effet que dans le commencement du mouvement, & que dés que la viteſſe rotatoire eſt devenue conſtante, elle contribue à la conſerver telle. Tab. III. Fig. 7.

§. 5. Nommons donc maintenant la viteſſe rotatoire angulaire conſtante de la machine $=$ ♉, la viteſſe relative, avec laquelle l'eau s'écoule en $C = v$, la hauteur verticale du tube $= a$, l'orifice en $C = b\,b$, celui en $D = c\,c$, l'amplitude du tube en $N = r\,r$; la viteſſe relative, avec laquelle l'eau entre en D, ſera $= \frac{b^2 v}{c^2}$, et celle en $N = \frac{b^2 v}{r^2}$. Regardons à préſent ſeparément l'élément $N\,n$ du tube, & rapportons le aux Tab. III. Fig. 8.

trois axes principaux perpendiculaires entre eux, B F, B G, B H, dont les deux B F & B G ſoyent horizontaux, (le point B étant le même que B, ou l'extrèmité inferieure de l'axe A B dans la Fig. 1.) & le troiſieme B H ſoit donc vertical. Que M *m* répréſente la projection de N *n* ſur le plan horizontal B F G: ſoit ω l'angle, que N *n* prolongée feroit avec ce plan; ψ l'angle *m* M *r* formé par l'element M *m* & M *r* parallèle à B F, & Φ l'angle M B F, compris entre l'axe B F & la droite B M, tirée du point B de l'axe B H, (qui eſt le même que B A dans la Fig. 1.) à l'élément projetté M *m*. Nommons encore B M, ou la diſtance perpendiculaire de N à l'axe B G, $= q$, l'eſpace parcouru par un grave dans une ſeconde $= g$, le tems exprimé en ſecondes $= t$, & l'élément N *n* $= \partial s$.

§. 6. Nommons la viteſſe abſolue de l'élément N *n* ſelon l'axe B F $=$ U, celle ſelon B G $=$ V, & celle ſelon B H $=$ W; on ſait, que l'élément N *n* ſera donc animé ſuivant ces mêmes directions par des forces accélératrices exprimées par $\frac{\partial U}{2 g \partial t}$, $\frac{\partial V}{2 g \partial t}$, $\frac{\partial W}{2 g \partial t}$. Or l'element N *n* a prémierement une viteſſe rotatoire angulaire horizontale $= \mho$, qui à la diſtance B M devient $= q \mho$; cette viteſſe réſolue ſuivant les deux directions B F & B G, donne ſuivant B F une viteſſe $= q \mho \, \text{ſin.} \Phi$, & ſuivant B G une viteſſe $= - q \mho \, \text{coſ.} \Phi$. (Je mets le ſigne —, parceque la rotation eſt cenſée ſe faire dans le ſens G M F.). Quant à l'autre viteſſe $\frac{b^2 v}{r^2}$ de l'element N *n*, il en nait d'abord une viteſſe verticale ſelon B H $= \frac{b^2 v \, \text{ſin.} \omega}{r^2}$, & une autre ſelon M *m* $= \frac{b^2 v \, \text{coſ.} \omega}{r^2}$: cette derniere étant réſolue encore ſelon M *r* & *r m*, ou B F & B G, donnera celle ſelon B F $= \frac{b^2 v \, \text{coſ.} \omega \, \text{coſ.} \psi}{r^2}$, & celle ſelon B G

$$= \frac{b^2 v \, \text{coſ.} \omega \, \text{ſin.} \psi}{r^2}.$$

On

On aura de cette façon

$$U = q \text{♉} \text{ſin.} \Phi + \frac{b^2 v \text{ coſ.} \omega \text{ coſ.} \psi}{r^2},$$

$$V = - q \text{♉} \text{ coſ.} \Phi + \frac{b^2 v \text{ coſ.} \omega \text{ ſin.} \psi}{r^2},$$

$$W = \frac{b^2 v \text{ ſin.} \omega}{r^2} :$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial U}{2 g \partial t} = \frac{\partial .}{2 g \partial t} \left(q \text{♉} \text{ ſin.} \Phi + \frac{b^2 v \text{ coſ.} \psi \text{ coſ.} \omega}{r^2} \right) = (\text{pour plus de buiveté}) \; A$$

$$\frac{\partial V}{2 g \partial t} = \frac{\partial .}{2 g \partial t} \left(q \text{♉} \text{ coſ.} \Phi + \frac{b^2 v \text{ ſin.} \psi \text{ coſ.} \omega}{r^2} \right) = \; \ldots \ldots \ldots \; B$$

$$\frac{\partial W}{2 g \partial t} = \frac{\partial .}{2 g \partial t} \left(\frac{b^2 v \text{ ſin.} \omega}{r^2} \right) = \; \ldots \ldots \ldots \; C.$$

§. 7. Réſolvons maintenant les forces accélératrices A & B en d'autres ſuivant les directions M *m*, & M O perpendiculaire à M *m*; on aura

Force accélératrice ſelon M *m* = A coſ. ψ + B ſin. ψ,

Force accélératrice ſelon M O = A ſin. ψ — B coſ. ψ.

Décompoſons de nouveau la force ſelon M *m* & la force C en d'autres, ſituées dans le même plan vertical, mais dont l'une agiſſe ſelon la direction N *n* du tube même, & l'autre lui ſoit perpendiculaire; on trouvera

Force accélératrice ſelon N *n*

= (A coſ. ψ + B ſin. ψ) coſ. ω + C ſin. ω = G,

Force accélératrice perpendiculaire dirigée vers en bas

= (A coſ. ψ + B ſin. ψ) ſin. ω — C coſ. ω.

§. 8. En multipliant chacune de ces forces accélératrices par $r r \partial s$, on aura les forces motrices, dont l'elément *n* N eſt animé ſuivant ces différentes directions. Or 1° la force ſelon M O agit avec le levier

B M × ſin. B M O = q coſ. (ψ — Φ);

2° la force perpendiculaire à N *n*, dirigée vers en bas, tend

 en

en partie à ſecouer & renverſer le tube ou toute la machine, qui doit être aſſes ſolidement conſtruite pour reſiſter à cet effort, & en partie elle contribue au mouvement rotatoire horizontal. Dans ce ſens on trouvera qu'elle agit avec un levier exprimé par q ſin. ω ſin. $(\psi - \Phi)$, & dans la direction O M, non M O. En ajoutant les deux momens, qui réſultent en multipliant chaque force motrice par ſon levier reſpectif, on trouvera un moment de force ſelon

$$\text{M O} = rr\partial s \times q \text{ coſ.} (\psi - \Phi) (\text{A ſin.} \psi - \text{B coſ.} \psi)$$
$$- rr\partial s \times q \text{ ſin.} \omega \text{ ſin.} (\psi - \Phi) [(\text{A coſ.} \psi + \text{B ſin.} \psi) \times \text{ſin.} \omega - \text{C coſ.} \omega],$$

que je poſe $= r r \partial s \times \text{H}$.

§. 9. Mais ce n'eſt pas encore tout. La force accélératrice tangentielle ſelon la direction du tube, que nous avons nommée G, & qui donne pour l'element N n une force motrice $= r r \partial s \times \text{G}$, tend auſſi à faire tourner le tube horizontalement avec un levier, qui doit être eſtimé

$$= q \text{ coſ.} \omega \text{ ſin.} (\psi - \Phi),$$

& dans le ſens O M, d'où il nait un moment ſelon

$$\text{M O} = - r r \partial s \times \text{G} \times q \text{ coſ.} \omega \text{ ſin.} (\psi - \Phi);$$

enſorte que nous aurons enfin le moment complet de l'eau, qui eſt renfermée dans le tube, $=$

$$\int r r \partial s \times \text{H} - \int r r \partial s \times \text{G} q \text{ coſ.} \omega \text{ ſin.} (\psi - \Phi),$$

où les intégrales ſeront étendues d'un bout du tube à l'autre.

§. 10. Pour que l'eau jouïſſe donc du mouvement, que nous lui ſuppoſons, en tournant autour de l'axe avec une viteſſe angulaire $= \aleph$, & en s'écoulant hors du tube avec une viteſſe $= v$, nous voyons qu'elle doit être animée d'un moment

ment de force, exprimé par la formule, que nous venons de trouver, & ce moment ſera fourni par la puiſſance motrice appliquée au levier AE. Si au reſte quelques lecteurs trouvoient encore de la difficulté à comprendre ce raiſonnement, ils n'auroient qu'à lire avec attention le Mémoire de M. Euler ſur la machine hydraulique de M. Segner *), où cet illuſtre Auteur a développé dans les Problèmes 3 & 4 avec toute l'étendue néceſſaire les principes, d'après lesquels le moment de forces, dont nous avons traité ici, doit être éſtimé. Quoiqu'il y ait un raiſonnement different, il ne peut que conduire aux mêmes réſultats. Tab. III. Fig. 7.

§. 11. Nommons maintenant la preſſion, que ſouffre l'eau dans le moment actuel au point $N = p$, & en $n = p + \partial p$; de ces deux preſſions contraires il réſulte un ſurplus de preſſion vers en-haut $= -\partial p$, qui étant multiplié par la ſection rr donne $-rr\partial p$. L'élément Nn lui-même a un poids exprimé par $rr\partial s$, mais qui n'agiſſant que ſur le plan incliné Nn, donne une force ſelon $Nn = -rr\partial s$ ſin. ω; diviſant la ſomme de ces deux forces par la maſſe $rr\partial s$, on aura la force accélératrice, qui agit ſur l'élément N

$$= -\frac{\partial p}{\partial s} - \text{ſin. } \omega;$$

or dans le §. 7. nous avons trouvé une autre expreſſion, que nous avons nommée G, pour la force accélératrice de l'élément Nn; nous aurons donc $-\frac{\partial p}{\partial s} - \text{ſin. } \omega = G$, d'où l'on tire $p = C - \int \partial s \text{ ſin. } \omega - \int G \partial s$; pour trouver la conſtante, il faut remarquer, qu'en C, où l'eau s'écoule, la preſſion eſt nulle, & qu'alors $\int \partial s$ ſin. ω devient égale à la hauteur verticale

X 3

*) Recherches ſur l'effet d'une machine hydraulique propoſée par M. Segner, dans l'Hiſtoire de l'Acad. R. des Sciences de Berlin, Année 1750.

cale du tube $= a$; ſi nous mettons donc l'intégrale complète de $\int G\, \partial s$ depuis B jusqu'en $C = N$, on aura $C = a + N$, & $p = a + N - \int \partial s$ ſin. $\omega - \int G\, \partial s$; donc à l'embouchure inférieure, où ces deux quantités intégrales s'évanouiſſent, on aura la preſſion requiſe $= a + N$, & pour toute l'embouchure $= (a + N)\, c\, c$.

§. 12. Mais la viteſſe relative, avec laquelle l'eau extérieure heurte contre celle, qui eſt contenue dans le tube, étant $= b\vartheta - \frac{b^2 v}{c^2}$, la hauteur due à cette viteſſe ſera $= \frac{(b\vartheta - \frac{b^2 v}{c^2})^2}{4g}$, & c'eſt ici un de cas, où le choc du fluide peut être éſtimé aſſés au juſte, non par la double, mais par la ſimple hauteur due à la viteſſe. Si donc de plus le tube ſe trouve plongé dans l'eau à une profondeur $= e$, nous aurions la preſſion ſur l'embouchure

$$= \left(e + \frac{(b\vartheta - \frac{b^2 v}{c^2})^2}{4g}\right) c\, c \; ^{*}),$$

ſi l'eau en entrant dans le tube, ne s'échappoit à cette preſſion avec une viteſſe $= \frac{b^2 v}{c^2}$, dont la hauteur due $= \frac{b^4 v^2}{4 g c^4}$; donc d'après les principes connus de la preſſion des fluides contre les tubes, dans lesquels ils ſe meuvent, la véritable preſſion

*) Il y a des auteurs qui doutent, que dans des cas ſemblables à celui, que nous conſidérons ici, où un corps ſe meut dans l'eau, on puiſſe éſtimer la preſſion, qui réſulte de la hauteur de l'eau au-deſſus du corps, égale à cette hauteur même, comme cela ſe fait, quand tout le ſyſtème eſt en repos: mais la théorie de la gravité ne me permet pas de croire, qu'il y ait une différence, & il faudroit des raiſonnemens bien démonſtratifs ou des expériences bien convainquantes pour me perſuader le contraire.

preſſion ſur l'embouchure ſera

$$= \left(e + \frac{(b\,\texttt{ʊ} - \frac{b^2 v}{c^2})^2}{4\,g} \right) c\,c - \frac{b^4 v^2}{4\,g\,c^2},$$

qui étant égalée à celle, que nous avons vu dans le §ᵉ. précedent être requiſe, donne cette premiere équation principale:

$$\text{I. } e\,c\,c + \frac{(b\,\texttt{ʊ} - \frac{b^2 v}{c^2})^2}{4\,g}\,c\,c - \frac{b^4 v^2}{4\,g\,c^2} = a\,c\,c + \text{N}\,c\,c.$$

§. 13. Enſuite comme la force $\frac{(b\,\texttt{ʊ} - \frac{b^2 v}{c^2})^2}{4\,g}$ réſiſte auſſi avec le levier b au mouvement rotatoire, qu'on imprime au tube, on aura, en appellant Q la puiſſance appliquée en E, & f ſon levier A E, cette autre équation principale:

$$\text{II. } \text{Q}f = \int r\,r\,\partial s\,.\,\text{H} - \int r\,r\,\partial s\,.\,\text{G}\,q \text{ coſ. } \omega \text{ ſin. } (\psi - \Phi)$$
$$+ \frac{b\,c\,c}{4\,g}(b\,\texttt{ʊ} - \frac{b^2 v}{c^2})^2,$$

& dans ces deux equations doit être contenue toute la ſolution phyſique du problème. Car la figure du tuyau étant donnee avec ſa hauteur a, l'on déterminera par ces équations la puiſſance Q & la viteſſe angulaire ʊ requiſes, pour élever l'eau à la hauteur $a - e$ au deſſus de ſa ſurface, & la faire couler en C avec une viteſſe donnée.

§. 14. De plus, comme la puiſſance abſolue s'éſtime toûjours par la force motrice, ſa viteſſe, & le tems, pendant lequel elle eſt appliquée, elle ſera ici $= \text{Q}\,.\,f\,\texttt{ʊ}\,.\,t$; & l'effet utile produit par une machine s'eſtimant par la quantité d'eau, élevee dans le méme tems à une hauteur donnée, il ſera pour notre machine, en faiſant $a - e = k$, $= b\,b\,v\,.\,k\,.\,t$, & l'on trouvera ainſi le rapport deſiré de la puiſſance abſolue à ſon effet

effet utile $= \frac{Q f u t}{b b k v t} = \frac{Q f u}{b b k v}$, & c'eſt en quoi conſiſte le calcul de l'effet de la machine, où l'on doit faire attention, que Q ſera exprimé en pieds cubiques d'eau.

§. 15. L'effet de la machine, ou le rapport de l'effet utile à la puiſſance abſolue, ſera très différent, non ſeulement ſelon la forme, que l'on donnera au tuyau, mais auſſi ſuivant le rapport, qu'on établira entre la hauteur *a* & la viteſſe *v*. Mais c'eſt en avoir aſſés dit *in abſtracto*.

§. 16. Il faut commencer à-préſent d'abord par développer les valeurs des lettres A, B, C, G, H, N; mais pour ne pas nous arrêter à des longueurs inutiles, nous ſuppoſerons déja tout le mouvement parvenu à l'uniformité, c'eſt-à-dire $\mho$ & v conſtantes. Les formules du §e. 6. deviendront donc

$$A = \frac{\mho\, \partial q\, \text{ſin.}\, \Phi + q\, \mho\, \partial \Phi\, \text{coſ.}\, \Phi - \frac{b^2 v\, \partial \psi\, \text{ſin.}\, \psi\, \text{coſ.}\, \omega}{r r}}{2 g\, \partial t}$$
$$- \frac{\frac{b^2 v\, \partial \omega\, \text{coſ.}\, \psi\, \text{ſin.}\, \omega}{r r} - \frac{2 b^2 v\, \partial r\, \text{coſ.}\, \psi\, \text{coſ.}\, \omega}{r^3}}{2 g\, \partial t},$$

ou bien, puisque $\mho = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, & $\frac{b^2 v}{r^2} = \frac{\partial s}{\partial t}$,

$$A = \frac{\partial q\, \partial \Phi\, \text{ſin.}\, \Phi + q\, \partial \Phi^2\, \text{coſ.}\, \Phi - \partial s\, \partial \psi\, \text{ſin.}\, \psi\, \text{coſ.}\, \omega}{2 g\, \partial t^2}$$
$$- \frac{\partial s\, \partial \omega\, \text{coſ.}\, \psi\, \text{ſin.}\, \omega - \frac{2 \partial s\, \partial r}{r}\, \text{coſ.}\, \psi\, \text{coſ.}\, \omega}{2 g\, \partial t^2},$$

$$B = - \frac{\partial q\, \partial \Phi\, \text{coſ.}\, \Phi + q\, \partial \Phi^2\, \text{ſin.}\, \Phi + \partial s\, \partial \psi\, \text{coſ.}\, \psi\, \text{coſ.}\, \omega}{2 g\, \partial t^2}$$
$$- \frac{\partial s\, \partial \omega\, \text{ſin.}\, \psi\, \text{ſin.}\, \omega - \frac{2 \partial s\, \partial r}{r}\, \text{ſin.}\, \psi\, \text{coſ.}\, \omega}{2 g\, \partial t^2},$$

C =

$$C = \frac{\partial s \, \partial \omega \, \text{coſ.}\, \omega - \frac{2 \partial s \partial r \, \text{ſin.}\, \omega}{r}}{2 g \partial t^2}:$$

& comme il y a $G = (A \, \text{coſ.}\, \psi + B \, \text{ſin.}\, \psi) \, \text{coſ.}\, \omega + C \, \text{ſin.}\, \omega$, on trouvera, en ſubſtituant les valeurs de A, B, C,

$$G = -\frac{\partial q \partial \Phi \, \text{coſ.}\, \omega \, \text{ſin.}\, (\psi - \Phi) + q \partial \Phi^2 \, \text{coſ.}\, \omega \, \text{coſ.}\, (\psi - \Phi) - \frac{2 \partial s \partial r}{r}}{2 g \partial t^2},$$

& delà, à cauſe de $\partial \Phi = \mho \partial t$, & $\partial s = \frac{b^2 v \partial t}{r^2}$,

$$G \partial s = -\frac{b b v \mho}{2 g} \cdot \frac{\partial q \, \text{coſ.}\, \omega \, \text{ſin.}\, (\psi - \Phi)}{r r} + \frac{\mho \mho}{2 g} \cdot \frac{q \partial s \, \text{coſ.}\, \omega \, \text{coſ.}\, (\psi - \Phi)}{r r} - \frac{b^4 v^2}{g} \cdot \frac{\partial r}{r^5}.$$

§. 17. Cette équation dans chaque cas particulier, ou pour un tuyau d'une figure donnée, ſe réduira toûjours à une équation à une ſeule variable, puisqu'en faiſant $\psi - \Phi = \chi$, elle n'aura plus que trois variables, dont on en éliminera encore deux, puisque la figure du tuyau étant une courbe à double courbure, elle doit être déterminée par deux équations. Mais il ſeroit embarraſſant & inutile d'aller plus loin avec la même généralité, que nous avons admiſe jusqu'à-préſent. Suppoſons donc, ce qui ſemble d'ailleurs un des cas les plus faciles à effectuer dans la pratique, & qu'on peut même hardiment regarder comme le plus avantageux, ſuppoſons, dis-je, que le tuyau ſoit formé d'un tube ſerpentant ou entortillé autour d'un cylindre vertical; cette condition ſeule ſera, que $q = b$ & $\partial q = 0$, de plus $\psi - \Phi = 90^\circ$, de ſorte que l'expreſſion G ſe change en celle-ci $G = -\frac{\partial s \partial r}{g r \partial t^2}$, & qu'on a $G \partial s = -\frac{b^4 v^2}{g} \cdot \frac{\partial r}{r^5}$, dont l'intégrale $= \frac{b^4 v v}{4 g r^4} - C$, & l'integrale compléte ou $N = \frac{v v}{4 g}(1 - \frac{b^4}{c^4})$.

§. 18. Il reſte à determiner la valeur de H, qui pour v conſtante, $q = h$, & $\psi - \phi = 90°$, devient

$$H = - h\, \text{ſin.}\,\omega\, [(A\, \text{coſ.}\,\psi + B\, \text{ſin.}\,\psi)\, \text{ſin.}\,\omega - C\, \text{coſ.}\,\omega],$$

ou bien, en mettant pour A, B, C, leurs valeurs, & faiſant attention, que $\text{ſin.}\,\psi = \text{coſ.}\,\phi$, & $\text{coſ.}\,\psi = - \text{ſin.}\,\phi$,

$$A = \frac{h\,\partial s\,\partial\omega\,\text{ſin.}\,\omega}{2g\,\partial t^2};$$

donc, à cauſe de $\partial\phi^2 = \gamma^2\,\partial t^2$, & $\partial s^2 = \frac{b^4\,v^2\,\partial t^2}{r^4}$, on a

$$r\,r\,\partial s\,.\,H = \frac{b^4\,h\,v\,v\,\partial\omega\,\text{ſin.}\,\omega}{2g\,r\,r}.$$

Enfin l'on aura auſſi

$$\int r\,r\,\partial s\,.\,G\,q\,\text{coſ.}\,\omega\,\text{ſin.}\,(\psi - \phi) = -\frac{h}{g}\int r\,r\,\partial s\,.\,\frac{\partial s\,\partial r\,\text{coſ.}\,\omega}{r\,\partial t^2}$$
$$= -\frac{h\,b^4\,.\,v\,v}{2g}\int\frac{2\,\partial r\,\text{coſ.}\,\omega}{r^3}.$$

Donc on a

$$\int r\,r\,\partial s\,.\,H - \int r\,r\,\partial s\,.\,G\,q\,\text{coſ.}\,\omega\,\text{ſin.}\,(\psi - \phi)$$
$$= \frac{h\,b^4\,v\,v}{2g}\left(\int\frac{\partial\omega\,\text{ſin.}\,\omega}{r\,r} + \int\frac{2\,\partial r\,\text{coſ.}\,\omega}{r^3}\right) = \frac{h\,b^4\,v\,v}{2g}\left(C - \frac{\text{coſ.}\,\omega}{r\,r}\right);$$

& en nommant l'inclinaiſon du tuyau à l'embouchure ſupérieure $= \theta$, l'intégrale complete ſera

$$= \frac{h\,b^4\,v\,v}{2g}\left(\frac{1}{c\,c} - \frac{\text{coſ.}\,\theta}{b\,b}\right):$$

cependant comme le premier coup d'oeil fait voir, qus la conſtruction la plus favorable ſera, en faiſant $\theta = 0$, deſorte que toutes les deux embouchures ſoyent horizontales, mais dans des ſens oppoſes, nous prendrons d'abord pour l'intégrale compléte $\frac{h\,b^4\,v\,v}{2g}\left(\frac{1}{c\,c} - \frac{1}{b\,b}\right)$.

§. 19. Il n'y a à-préſent qu'à ſubſtituer ces différentes valeurs dans nos deux équations principales, où nous ferons auſſi pour abréger $f = h$, & nous aurons:

I.

$$\text{I. } \frac{(b\vartheta-\frac{b^2v}{c^2})^2cc}{4g}-\frac{b^4v^2}{4gcc}=kcc+\frac{v^2cc}{4g}\left(1-\frac{b^4}{c^4}\right),$$

$$\text{II. } Q=\frac{b^4vv}{2g}\left(\frac{1}{cc}-\frac{1}{bb}\right)+\frac{cc}{4g}\left(b\vartheta-\frac{b^2v}{c^2}\right)^2.$$

§. 20. De la premiére équation l'on tire

$$(b\vartheta-\tfrac{b^2v}{c^2})^2=4gk+vv,$$

donc la viteſſe de la puiſſance Q

$$b\vartheta=\tfrac{b^2v}{c^2}+\sqrt{(4gk+vv)},$$

& la puiſſance elle-même

$$Q=\tfrac{b^4vv}{2g}(\tfrac{1}{cc}-\tfrac{1}{bb})+kcc+\tfrac{ccvv}{4g}$$
$$=kcc+\tfrac{vv}{4g}(\tfrac{2b^4}{cc}-2bb+cc):$$

enſuite le moment de la puiſſance

$$Qb\vartheta=[kcc+\tfrac{vv}{4g}(\tfrac{2b^4}{cc}-2bb+cc)]\times[\tfrac{b^2v}{c^2}+\sqrt{(4gk+vv)}],$$

& en faiſant $cc=mbb$, & $vv=nngk$, on aura le rapport cherché de la puiſſance abſolue à l'effet utile de la machine

$$\tfrac{Qb\vartheta}{kbbv}=[m+\tfrac{1}{4}nn(\tfrac{2}{m}-2+m)]\times[\tfrac{1}{n}+\sqrt{\tfrac{4+nn}{nn}}].$$

§. 21. On voit que cette fonction des deux quantités m & n, que nous appellerons S, peut varier extrêmement, ſuivant les différentes valeurs, qu'on donnera à ces variables, & qu'elle augmenteroit même à l'infini, en faiſant m ou n, ſoit infiniment grand, ſoit infiniment petit. Mais il nous importe de ſavoir le plus grand effet utile de la machine, qui aura lieu, quand la fonction S, qui exprime le rapport de la puiſſance employée à l'effet qu'elle rend, devient un *minimum*. Il

faudroit donc prendre les deux différences partielles de S, $(\frac{\partial s}{\partial m})$ & $(\frac{\partial s}{\partial n})$, & mettre chacune ſéparément $= 0$, d'où l'on obtiendroit deux équations en termes finis, par leſquelles on détermineroit les valeurs de m & n les plus favorables. Mais ces équations ſeroient ſi compliquées & monteroient à de telles dimenſions, qu'il y auroit difficilement quelque moyen pour s'en débarraſſer. D'ailleurs quoique dans la théorie il y auroit indubitablement quelque avantage à prendre $m >$ ou < 1, c'eſt-à-dire à faire les embouchures $b\,b$ & $c\,c$ inégales, il ſeroit difficile cependant d'exécuter cela dans la pratique, de façon qu'on n'y perdit pas plus par d'autres circonſtances acceſſoires. Faiſons donc ſimplement $b\,b = c\,c$, ou $m = 1$, enſorte que le tuyau ſoit partout également ample, & la fonction S prendra cette forme:

$$S = (1 + \tfrac{1}{4}\,n\,n)\,(1 + \sqrt{\tfrac{4 + n\,n}{n\,n}}),$$

dont la différence étant miſe $= 0$, on trouve $n = \sqrt{\tfrac{4}{3}}$, ou $v = \sqrt{\tfrac{4}{3}\,g\,k}$; deſorte que la viteſſe la plus favorable, avec laquelle l'eau puiſſe s'écouler, ſera due au tiers de la hauteur, à laquelle elle doit être élevée: & la viteſſe rotatoire $b\,\delta$ deviendra $= 3\sqrt{\tfrac{4}{3}\,g\,k}$, & la puiſſance $Q = \tfrac{4}{3}\,b\,b\,k$; la fonction S prend une valeur $= 4$, deſorte, qu'en faiſant abſtraction de la friction & des autres empêchemens acceſſoires, l'effet utile de la machine ſera $= \tfrac{1}{4}$ de la puiſſance abſolue qu'on employe.

§. 22. Si l'on accordoit aſſés d'attention à cette machine, pour vouloir en faire un modèle; il faudroit, à-fin de donner à l'eau un libre écoulement, placer la machine au milieu d'un canal circulaire placé immédiatement au-deſſous de l'embouchure ſupérieure, & ajouter à cette embouchure, telle que nous l'avons décrite plus haut, un petit bout de tuyau hori-

horizontal, dont l'axe ſoit dirigé perpendiculairement vers l'axe du cylindre, autour duquel le tuyau conducteur ſerpente. Cette addition ne changera en rien la théorie de la machine, & celle-ci en tournant verſera l'eau ſucceſſivement dans toutes les parties du canal circulaire, tout comme cela ſe fait dans la machine hydraulique de M. de Mour, calculée par M. Euler dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1752.

SUITE DU MÉMOIRE
SUR LES
LISTES DES MARIAGES, DES NAISSANCES ET DES MORTS À St. PÉTERSBOURG,
CONTENANT
LA PÉRIODE DE 1781 JUSQU'EN 1785.

Par
W. L. KRAFFT.

Communiqué à l'Académie le 21 *Aout.* 1788.

Je reprens dans ce Mémoire mes recherches ſur les Tables de la fecondité & de la mortalité à St. Pétersbourg, à la période où je les ai laiſſées dans le premier Mémoire que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Académie ſur ce même objet (*). Là, j'ai examiné & rédigé ces Liſtes ſous leurs points de vue les plus intéreſſans pour une ſuite de 17 ans, depuis 1764 époque

(*) Eſſai ſur les tables des mariages, des naiſſances & des morts de la ville de St. Pétersbourg, depuis 1764 jusqu'à 1780, précedé d'une expoſition générale de l'utilité qu'auroient de pareilles tables, ſi elles s'étendoient ſur des Gouvernements entiers de la Ruſſie. Voyes les Actes de l'Académie pour l'année 1782. Partie I.

époque de leur établiſſement jusqu'en 1780; ici, en conſéquence du Plan, que j'ai cru qu'il conviendroit de fixer pour leur rédaction de cinq à cinq ans, j'y ajoute la période de 1781 à 1785. Plus on développe les différens réſultats que préſentent de pareilles Tables, & les concluſions importantes qu'on peut en tirer; plus on eſt convaincu, qu' étendues à de Gouvernemens entiers de la Ruſſie, & ſurtout ſoumiſes à un établiſſement formel c'eſt à dire à un Bureau ou Comptoir chargé de recueillir ces nombreuſes collections, de les rediger ſelon les vrais principes de l'Arithmétique politique & de les employer aux recherches de ce qu'on eſt intereſſé de ſçavoir & d'obſerver ſur la population d'un ſi grand Empire, elles ne pourroient pas manquer de procurer de grandes inſtructions, & de conduire à des applications d'un rapport le plus immédiat avec les interêts de l'État & le bien de l'humanité. Je crois avoir démontré ſuffiſamment cette vérité dans mon premier Mémoire; j'y ai indiqué auſſi les principales corrections à faire aux modeles des Tables pour les rendre propres à des uſages plus étendus, & établi des principes à ſuivre dans leur rédaction périodique, afin d'être à portée de ſaiſir toutes les lumieres qu'elles ſont capables de procurer. C'eſt pourquoi en mettant ce premier Mémoire pour baſe, j'ai cru, pour éviter trop de redites, pouvoir enviſager celui-cy comme devant être joint au premier titre par tître & remarque par remarque, en me bornant ici à un expoſé court & précis des principales réflexions, que les liſtes de la ſeule ville de St. Pétersbourg pour la derniere période de cinq ans, ont pu me fournir.

I. Ta-

I. Table générale des nombres annuels des Mariages, des Naiſſances & des Morts.

Année.	Mariages.	Naiſſances.	Morts.
1781	1207	5540	5065
1782	1364	5588	4704
1783	1411	6156	4963
1784	1387	6052	5260
1785	1471	6109	5818
1826 jours.	6840	29445	25810

II. Table ſpéciale des nombres annuels des Mariages.

Année.	A	B	C	D	Somme.
1781	898	77	157	75	1207
1782	1008	116	160	80	1364
1783	1057	113	157	84	1411
1784	1019	100	172	96	1387
1785	1057	112	195	107	1471
1826 jours.	5039	518	841	442	6840

A. Mariages entre des Garçons & des Filles.
B. Mariages entre des Veufs & des Filles.
C. Mariages entre des Garçons & des Veuves.
D. Mariages entre des Veufs & des Veuves.

III. Ta-

III. Table ſpéciale des nombres annuels des Naiſſances.

Année.	Garçons	Filles.	Somme.	Dans ce nombre il y a des Enfans venus morts au monde. Garçons	Filles.	Somme.
1781	2813	2727	5540	11	3	14
1782	2797	2791	5588	3	0	3
1783	3160	2996	6156	4	2	6
1784	3123	2929	6052	9	7	16
1785	3127	2982	6109	9	4	13
1826 jours.	15020	14425	29445	36	16	52

Sous le titre des Enfans venus morts au monde les Tables comprennent auſſi ceux qui ſont morts avant le Batême.

IV. Table ſpéciale des nombres annuels des Morts.

Année.	Mâles.	Fémell.	Somme.	Dans ce nombre il y a des Corps trouvés morts. Mâles.	Fémell.	Somme.
1781	3273	1792	5065	67	11	78
1782	3030	1674	4704	32	3	35
1783	3343	1620	4963	37	2	39
1784	3737	1523	5260	41	3	44
1785	3986	1832	5818	40	3	43
1826 jours.	17369	8441	25810	217	22	239

Dans ces nombres des morts on a compté auſſi les enfans venus morts au monde, conſignés dans la Table précédente.

V. Table ſpéciale des Morts du ſexe masculin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1781	1782	1783	1784	1785	Sommes.
Enfans venus morts au m.	11	3	4	9	9	36
Entre 0 — 1 an	580	484	478	523	449	2514
1 — 2	201	204	228	146	256	1035
2 — 3	78	62	46	47	87	320
3 — 5	74	49	45	42	72	282
5 — 10	106	89	58	69	120	442
10 — 15	68	51	44	37	67	267
15 — 20	137	136	113	166	126	678
20 — 25	221	184	267	446	407	1525
25 — 30	316	312	379	494	571	2072
30 — 35	280	277	400	449	449	1855
35 — 40	250	294	347	324	319	1534
40 — 45	192	183	200	252	220	1047
45 — 50	162	132	165	157	187	803
50 — 55	130	129	145	119	130	653
55 — 60	96	107	111	111	101	526
60 — 65	105	96	90	102	138	531
65 — 70	64	69	67	70	63	333
70 — 75	64	60	46	62	68	300
75 — 80	32	40	32	34	39	177
80 — 85	22	22	26	30	52	152
85 — 90	11	7	7	2	8	35
90 — 95	4	6	5	3	5	23
95 — 100	1	1	2	2	2	8
deſſus 100	1	1	1	0	1	4
Sommes	3206	2998	3306	3696	3946	17152

VI. Ta-

VI. Table ſpéciale des Morts du ſexe féminin rangés ſelon leur âge.

Age des morts.	1781	1782	1783	1784	1785	Sommes.
Enfans venus morts au m.	3	0	2	7	4	16
Entre 0 — 1 an	566	504	532	480	527	2609
1 — 2	125	76	56	60	88	405
2 — 3	83	58	45	39	71	296
3 — 5	136	87	88	77	160	548
5 — 10	70	48	52	43	68	281
10 — 15	40	21	25	26	35	147
15 — 20	38	48	54	41	51	232
20 — 25	58	59	60	47	67	291
25 — 30	78	101	82	93	93	447
30 — 35	46	87	45	65	71	314
35 — 40	85	74	103	98	99	459
40 — 45	50	67	62	59	59	297
45 — 50	60	74	62	64	66	326
50 — 55	40	44	54	40	57	235
55 — 60	59	81	64	74	52	330
60 — 65	52	53	36	50	58	249
65 — 70	42	47	48	46	62	245
70 — 75	72	54	62	46	62	296
75 — 80	37	38	31	27	24	157
80 — 85	24	26	42	20	45	157
85 — 90	10	12	3	12	4	41
90 — 95	4	2	9	6	5	26
95 — 100	2	9	1	0	1	13
deſſus 100	1	1	0	0	0	2
Sommes	17[illegible]1	107[illegible]	1618	1[illegible]2[illegible]	1[illegible]	8419

 VII. Ta-

VII. Table réduite des Morts rangés ſelon leur âge.

Age des Morts.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a.	De 1000 morts du ſexe féminin il y a.	De 1000 morts pris en général il y a.
Enfans venus morts au monde.	2, 10	1, 90	2, 03
Entre 0 — 1 an	146, 57	309, 89	200, 34
1 — 2	60, 34	48, 11	56, 31
2 — 3	18, 66	35, 16	24, 09
3 — 5	16, 44	65, 09	32, 46
5 — 10	25, 76	33, 37	28, 27
10 — 15	15, 57	17, 46	16, 19
15 — 20	39, 53	27, 56	35, 59
20 — 25	88, 91	34, 56	71, 02
25 — 30	120, 80	53, 09	98, 51
30 — 35	108, 15	37, 30	84, 82
35 — 40	89, 44	54, 52	77, 94
40 — 45	61, 04	35, 28	52, 56
45 — 50	46, 82	38, 73	44, 15
50 — 55	38, 07	27, 91	34, 73
55 — 60	30, 67	39, 20	33, 48
60 — 65	30, 96	29, 58	30, 50
65 — 70	19, 41	29, 10	22, 60
70 — 75	17, 49	35, 16	23, 31
75 — 80	10, 32	18, 65	13, 06
80 — 85	8, 86	18, 65	12, 08
85 — 90	2, 04	4, 87	2, 97
90 — 95	1, 34	3, 09	1, 92
95 — 100	0, 47	1, 54	0, 82
deſſus 100	0, 24	0, 24	0, 24

VIII.

VIII. Table de la Vitalité des âges des hommes à St. Pétersbourg

telle, qu'elle ſert aux calcus des Rentes viagéres & d'autres établiſſemens de ce genre.

	De 1000 Garçons nouveaux nés.	De 1000 Filles nouvellement nées.	De 1000 Enfans nouveaux nés en général.
viennent vivans au monde	997, 90	998, 11	997, 96
accompliſſent la 1 année	851, 33	688, 22	797, 62
2	790, 99	640, 11	741, 31
3	772, 33	604, 95	717, 22
5	755, 89	539, 86	684, 76
10	730, 13	506, 49	656, 49
15	714, 56	489, 03	640, 30
20	675, 03	461, 47	604, 71
25	586, 12	426, 91	533, 69
30	465, 32	373, 82	435, 18
35	357, 17	336, 52	350, 36
40	267, 73	282, 00	272, 42
45	206, 69	246, 72	219, 86
50	159, 87	207, 99	175, 71
55	121, 80	180, 08	140, 98
60	91, 13	140, 88	107, 50
65	60, 17	111, 30	77, 00
70	40, 76	82, 20	54, 40
75	23, 27	47, 04	31, 09
80	12, 59	28, 39	18, 03
85	4, 09	9, 74	5, 95
90	2, 05	4, 87	2, 98
95	0, 71	1, 78	1, 06
100	0, 24	0, 24	0, 24

IX. Table ſpéciale des Morts du ſexe maſculin rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

Maladies & cauſes de la mort.	1781	1782	1783	1784	1785	Sommes
Pleureſie - - - -	777	660	698	764	715	- 3614
Fievre chaude - - -	1150	1072	1348	1534	1716	- 6820
Conſomption - - -	512	519	613	576	566	- 2786
Convulſions - - -	122	122	123	96	87	- - 550
Vieilleſſe - - - -	105	112	80	101	135	- - 533
Dyſſenterie - - - -	121	105	172	264	219	- - 881
Petite verole - - -	159	111	12	44	182	- - 508
Hydropiſie - - - -	80	97	89	106	108	- - 480
Malheur - - - -	22	28	23	21	14	- - 108
Apoplexie - - - -	77	89	78	86	105	- - 435
Scorbut - - - -	16	23	14	44	42	- - 139
Dentition - - - -	17	12	12	15	19	- - - 75
Epilepſie - - - -	7	3	9	10	6	- - - 35
Verole - - - - -	0	1	0	0	1	- - - 2
Rougeole - - - -	0	0	4	1	7	- - - 12
Eſquinancie - - -	6	9	3	4	1	- - - 23
Phreneſie - - - -	3	4	3	2	1	- - - 13
Etouffem. des enfans au ſommeil par la mere -	0	0	0	1	0	- - - 1
Yvrognerie - - - -	0	2	0	0	0	- - - 2
Fievre - - - - -	0	0	0	0	0	- - - 0
Pierre - - - - -	0	0	0	0	0	- - - 0
Maladies inconnues - -	21	26	21	18	13	- - - 99
Sommes - -	3195	2995	3302	3687	3937	17116

X.

X. Table ſpéciale des Morts du ſexe féminin rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

Maladies & cauſes de la mort.	1781	1782	1783	1784	1785	Sommes
Pleureſie	668	557	555	536	582	2898
Fievre chaude	287	221	286	268	325	1387
Conſomption	228	318	314	283	279	1422
Convulſions	98	92	105	80	96	471
Vieilleſſe	116	162	133	129	175	715
Dyſſenterie	14	23	28	26	14	105
Petite verole	193	114	10	35	185	537
Hydropiſie	40	43	64	42	43	232
Malheur	8	5	3	7	7	30
Apoplexie	33	44	28	28	36	169
Scorbut	5	9	4	5	7	30
Enfantement	46	53	34	37	36	206
Dentition	10	10	17	7	13	57
Epilepſie	2	1	5	3	3	14
Verole	0	0	3	1	0	4
Rougeole	4	2	2	1	14	23
Esquinanſie	5	0	2	6	3	16
Phreneſie	2	1	2	2	0	7
Etouffem. des enfans au ſommeil par la mere	0	0	0	0	0	0
Yvrognerie	0	0	0	0	0	0
Pierre	0	0	0	0	0	0
Maladies inconnues	19	16	21	17	7	80
Sommes	1778	1671	1610	1513	1825	8403

XI.

XI. Table réduite des Morts

rangés ſelon les maladies ou les cauſes de la mort.

Maladies & cauſes de la mort.	De 1000 morts du ſexe maſculin il y a.	De 1000 morts du ſexe féminin il y a.	De 1000 morts pris en général il y a.
Pleureſie - - - - - -	211, 14	344, 88	255, 18
Fievre chaude - - -	398, 46	165, 06	321, 61
Conſomption - - - - -	162, 78	169, 22	164, 89
Convulſions - - - - -	32, 13	56, 05	40, 01
Vieilleſſe - - - - - -	31, 14	85, 09	48, 90
Dyſſenterie - - - - -	51, 47	12, 49	38, 64
Petite verole - - -	29, 68	63, 91	40, 95
Hydropiſie - - - - -	28, 04	27, 61	27, 91
Malheur - - - - - -	6, 31	3, 57	5, 41
Apoplexie - - - - -	25, 41	20, 11	23, 67
Scorbut - - - - - -	8, 12	3, 57	6, 62
Enfantement - - - -		24, 52	8, 07
Dentition - - - - - -	4, 38	6, 78	5, 17
Epilepſie - - - - - -	2, 04	1, 67	1, 92
Verole - - - - - -	0, 12	0, 48	0, 23
Rougeole - - - - - -	0, 70	2, 74	1, 37
Eſquinancie - - - - -	1, 34	1, 90	1, 53
Phreneſie - - - - - -	0, 76	0, 83	0, 78
Etouffem. des enfans au ſommeil - - -	0, 06	0, 00	0, 04
Yvrognerie - - - - -	0, 12	0, 00	0, 08
Fievre - - - - - - -	0, 00	0, 00	0, 00
Pierre - - - - - -	0, 00	0, 00	0, 00
Maladies inconnues - -	5, 78	9, 52	7, 01

XII.

XII. Table ſpéciale des Morts rangés ſelon les mois.

	Mâles.	Fem.	Somme.		Males.	Fem.	Somme.
Janvier.	1370	733	2103	Juillet.	1423	737	2160
Février	1292	651	1943	Aout.	1329	786	2115
Mars.	1465	728	2193	Septem.	1185	635	1820
Avril.	1669	661	2330	Octobr.	1225	634	1859
Mai.	1992	704	2696	Novbr.	1184	638	1822
Juin.	1644	771	2415	Décembr.	1338	725	2063

Dans ces nombres on ne comprend pas les enfans venus morts au monde, ni les corps trouvés morts.

Le plus grand nombre des morts, & le mois, ou il a eu lieu.			Le plus petit nombre des morts & le mois, ou il a eu lieu.	
Année.	Mâles.	Femelles.	Males.	Femelles.
1781	Mai. 339	Décembr. 198	Août. - 216	Avril. 107
1782	Févr. 299	Janvier - 215	Août. - 209	Septbr. 110
1783	Mai. 363	Août. - 192	Févr. - 210	Novbr. 104
1784	Mai. 509	Août. - 160	Févr. - 217	Octbr. 101
1785	Mai. 505	Juin. - 201	Septembr. 235	Novbr. 124

Les Tables précédentes nous fourniſſent d'abord les ſuivans

Réſultats généraux.

I. *État moyen de la population à St. Pétersbourg dans la période de* 1781 *à* 1785.

1.) Dans cette période il ſe fit à St. Pétersbourg 1368 mariages par an.

2.) Il y naquit annuellement 5889 enfans, 3004 garçons & 2885 filles.

3.) Il y mourut 5162 perſonnes par an, 3474 mâles & 1688 fémelles.

4.) Il y eut un excédant annuel des naiſſances ſur les morts de 727 perſonnes; il y naquit 1197 fémelles plus, qu'il n'en mourut, mais il y mourut 470 mâles plus, qu'il n'en naquit.

II. *Parallele entre les états moyens de la population à St. Pétersbourg dans quatre périodes conſécutives.*

Nombre annuel des	Périodes.			
	1764-1770	1771-1775	1776-1780	1781-1785
Mariages . .	1351	1221	1305	1368
Naiſſances				
Garçons .	2592	2639	2898	3004
Filles . .	2530	2476	2740	2885
Total - -	5122	5115	5638	5889
Morts				
Mâles . .	3036	3244	2752	3474
Fémelles . .	1641	1677	1559	1688
Total - -	4677	4921	4311	5162
Excédant des naiſſances				
en Males .	— 444	— 605	+ 146	— 470
en Fémelles	+ 889	+ 799	+1181	+1197
Total - -	+ 445	+ 194	+1327	+ 727

Le

Le ſigne + indique, que le nombre des naiſſances a ſurpaſſé celui des morts, & le ſigne — en marque le contraire.

1.) La derniere période de 1781 à 1785 ſe diſtingue des précedentes par le plus grand nombre annuel des Mariages ainſi que par celui des naiſſances.

2.) L'excédant annuel des naiſſances ſur les morts a été à la verité dans la derniere période plus grand, que dans les deux premieres; mais cependant presque de la moitié ou en raiſon de 5 à 9 plus petit, que dans la période immediatement précédente; & outre cela cet excédant ne reſultoit dans la derniere période, que des naiſſances de femelles, au lieu que dans la période précédente il ſe trouvoit avantageuſement dans les naisſances de l'un & de l'autre ſexe. Nos tables demontrent, que ce déſavantage de la derniere période a eu ſa ſource principale dans les épidemies des fievres chaudes, qui dans les trois dernieres années ont occaſionné une grande mortalité des hommes, au lieu que ce fleau a fait beaucoup moins de ravage parmi les femmes, qui n'en on été extraordinairement attaquées, qu'en 1785.

III. *Parallele entre les états moyens des Populations à St. Pétersbourg & à Paris dans la même periode.*

Dans les Mémoires de l'Acad. de Sciences à Paris pour l'année 1783 on rapporte les nombres des naiſſances, des mariages & des morts de cette ville depuis 1771 jusqu'en 1784. En prenant la derniere période de 4 ans je trouve pour Paris le nombre moyen annuel des mariages = 5025; des naisſances

ſances = 19715; des morts = 20230. Comparant ces nombres avec ceux, que nos tables nous donnent pour St. Péterbourg, on obtient un apperçu tres vraiſemblable des rapports de la population de St. Pétersbourg à celle de Paris. Ce rapport ſe trouve

par les nombres annuels des mariages comme 10 à 36
des naiſſances comme 10 à 38
des morts comme 10 à 39.

Le milieu entre ces trois rapports donne celui de 10 à 36; enſorte qu'on peut établir avec bien de la probabilité, que la population de St. Pétersbourg étoit dans cette période à celle de Paris comme 10 à 36, ce qui eſt très bien d'accord avec les reſultats des denombremens effectifs, comme nous verrons dans la ſuite.

Outre ces reſultats généraux les Liſtes données cy-desſus nous fourniſſent encore les ſuivantes

Rémarques ſpéciales

relatives aux titres, que j'ai établis dans mon premier Mémoire.

I. Nombre moyen des habitans de St. Pétersbourg & rapport du nombre des nationaux à celui des étrangers.

1.) Pour être à même de faire les emplois les plus interéſſans de pareilles liſtes il faut, que le nombre des vivans qu'elles embraſſent, ſoit connu. Nous jouiſſons de cet avantage pour la periode en queſtion; car par un denombrement fait en 1784 par ordre de la Police, on a trouvé toute la Population de St. Petersbourg montant à 192446 perſonnes, 126827 mâles & 65619 femelles, & le nombre de batimens de toute eſpèce de 3840. Dans les Mémoires de Paris

ris allegués cy deſſus on rapporte, que la population y étoit dans la même période de 593070 habitans. La population de St. Pétersbourg eſt donc à celle de Paris en raiſon de 10 à 31. Par les paralleles de l'année commune des naiſſances, des mariages & des morts nous venons de trouver le rapport aſſez approchant de 10 à 36.

2.) Il reſulte d'un calcul aſſes exacte, que la ville de St. Pétersbourg telle qu'elle eſt diviſee en 42 quartiers, & ſans compter les trois grandes places de pâturage, eſt aſſiſe ſur une ſurface de 48⅔ Werſtes quarrées, ou d'une lieue géographique quarrée, (*) enſorte, qu'il vient 3976 hommes ſur une Werſte quarrée, 62 Sagénes quarrées ſur chaque homme, & par ce qu'a été dit dans la rémarque précédente, 50 hommes ſur chaque maiſon.

3.) Il ſeroit à déſirer, qu'on eut continué à diſtinguer dans les tables de St. Pétersbourg les nationaux d'avec les étrangers, comme on l'a fait en 1764 & 1765, ce qui m'a mis en état de faire dans mon premier mémoire des remarques intéreſſantes ſur la différence qu'on obſerve dans la fécondité, la mortalité & la force des maladies des uns & des autres. Pour y ſuppléer en quelque façon, quant à la derniere période, je donne ici la table ſuivante tirée des régiſtres de toutes les Paroiſſes étrangéres de St. Pétersbourg, qui a cependant le defaut de ne marquer ni l'âge ni le genre de maladies des morts.

 État

(*) La ſurface de la ville eſt evaluée à 5048 Déſaetines & 738 ſagénes quarrées; une Déſaetine contient 2400 Sagénes quarrées, 80 ſagénes en longueur & 30 en largeur.

État des Mariages, des Naiſſances & des Morts des Étrangers à St. Pétersbourg, depuis 1781 jusqu'en 1785.

	Mariages	Naiſſances.			Morts.		
		Garç.	Fill.	Somme	Hommes	Femmes	Somme
1781	198	340	351	691	459	351	810
1782	239	316	370	686	417	336	753
1783	232	382	381	763	428	355	783
1784	236	383	396	779	414	302	716
1785	223	380	379	759	425	396	821
Total	1128	1801	1877	3678	2143	1740	3883

En prenant les ſommes totales de cette table & en les comparant avec les ſommes reſpectives pour les nationaux on trouve le rapport entre les nombre

des mariages = 51 : 10
des naiſſances = 70 : 10
des morts = 57 : 10.

Le rapport moyen de ces trois eſt celui de 59 à 10 de façon, qu'on peut établir avec bien de vraiſemblance que dans cette période on comptoit à St. Petersbourg 59 ruſſes contre 10 étrangers & que dans la population totale de 192446 perſonnes il y avoit 164556 ruſſes & 27890 etrangers & conſequemment 144 étrangers ſur 1000 habitans. (*)
Dans

(*) Il peut être utile dans quelques cas d'avoir les États ſpécials des Mariages, des Naiſſances & des Morrs de chacune des Nations étrangeres ou réligions

Dans la période précédente j'ai trouvé 125 étrangers ſur 1000 habitans; il ſemble donc, que leur nombre s'eſt augmenté depuis en raiſon de 11 à 10.

II. Fécondité intentionelle.

1.) Le nombre moyen annuel des mariages a été = 1368; calcul moyen de 5 ans. J'en trouve le rapport au nombre de la population ou la meſure de la fécondité intentionelle = $\frac{1}{145}$, c'eſt à dire, qu'entre 140 perſonnes il ſe fit un mariage par an, ou que de 70 perſonnes il y en eut annuellement une, qui s'eſt mariée. Cette fécondité intentionelle eſt ſans doute extraordinairement petite & méme conſidérablement moindre, que celle que j'ai trouvée pour les périodes précédentes, ou elle a été = $\frac{1}{126}$, & meme dans cette derniere periode elle a été à St. Pétersbourg parmi les étrangers = $\frac{1}{122}$ & à Paris = $\frac{1}{118}$. Quoique donc cette période ſemble ſe diſtinguer avantageuſement des autres par le plus grand

---

ligions à part, qui ſe trouvent établies dans la ville. Voici ce que j'ai pu obtenir à cet égard par les régiſtres des différentes Paroiſſes pour les cinq ans de la période de 1781 à 1785.

	Mariages	Naiſſances	Morts.
Allemands Luthériens . .	701	2116	2139
Allemands réformés . . .	31	103	81
François réformés . . .	10	52	41
Catholiques	151	453	475
Finnois	128	610	737
Suedois	86	223	321
Anglois	17	90	75
Hollandois	2	20	9
Armeniens	2	11	5
Total	128	3678	3883

grand nombre des mariages : cependant la fécondité intentionelle y étoit moindre en raiſon de 126 à 140. Un tel changement arrivé a une des ſources principales de là population, s'il étoit indiqué par exemple par les tables d'une Province entiere, mériteroit ſans doute l'attention du Gouvernement, vûqu'en ſuppoſant la fécondité réelle $= 4,3$ & la mortalité générale $= \frac{1}{37}$, comme elles l'ont été dans la derniere période ; le calcul expoſé dans mon premier Mémoire fait voir, que la diminution de la fécondité intentionelle de $\frac{1}{128}$ en $\frac{1}{140}$ en produit une dans la fécondité générale de $\frac{1}{27}$ en $\frac{1}{32}$ & récule par là l'époque du doublement de la population de presqu'un ſiecle.

2.) Le nombre des Veuves qui ſe ſont remariées, a été dans cette période auſſi bien que dans les pércédentes plus grand, que celui de veufs qui ont paſſé a de ſecondes nôces, en raiſon de 7 à 5 ; ce qui eſt d'autant plus remarquable, que par tout ailleurs il en arrive le contraire.

3.) Pour donner aux Liſtes des mariages toute la perfection dont elles ſont ſuſceptibles, il faudroit y marquer auſſi l'âge des perſonnes, qui ſe marient. Il ſeroit à deſirer auſſi, qu'on indiquat, ſi ce ſont les premieres, les ſecondes &c. nôces de l'epoux ou de l'épouſe. M. Dan. Bernoulli dans un Memoire ſur la durée moyenne des mariages, inſeré au Tome XII. des Nouv. Comment. de l'Académie a démontré l'uſage politique, qu'on pourroit faire des Liſtes de mariages portées au degré de perfection dont je viens de parler.

III. Fécondité réelle.

1.) Le nombre moyen annuel des naiſſances a été $= 5889$ dans lequel il y avoit 3004 garçons & 2885 filles; calcul

calcul moyen de 5 ans. Le rapport de ce nombre à celui des mariages ou la méſure de la fécondité réelle a donc été $= 4, 3$; c'eſt à dire, que l'un compenſant l'autre, on comptoit 43 enfans ſur 10 mariages. C'eſt ſans doute une forte fecondité réelle. Ordinairement elle eſt de beaucoup moindre dans les grandes villes; c'eſt ainſi par exemple qu'à Paris elle n'étoit dans la derniere période, que de 3,9 enſorte que 10 mariages n'y produiſoient que 39 naiſſances. La différence eſt très conſidérable. Un Gouvernement de 500000 perſonnes & dans le cas de la plus petite fécondité intentionelle $= \frac{1}{145}$ aura 1429 enfans de plus par an, la fécondité réelle étant portée de 3, 9 à 4, 3. Cette fécondité a ſans doute ſa cauſe uniforme & conſtante dàns la nature de l'eſpèce humaine; mais entant que l'action de cette cauſe peut être augmentée ou diminuée par des circonſtances variables politiques ou morales, elle eſt aſſujettie aux ſoins du Gouvernement. Süsmilch donne un tableau très intereſſant des cauſes principales, qui peuvent y produire des différences ſenſibles en rendant les mariages plus ou moins feconds.

2.) Dans la totalite des naiſſances de 29445 enfans il y eut 15020 garçons & 14425 filles. Ces deux nombres ſont entre eux dans le rapport de 104 à 100; ce qui confirme donc auſſi dans cette période la remarque intereſſante qu'on a faite en tout temps & par tout, que dans toute *grande* quantité des naiſſances le nombre des garçons ſurpaſſe celui des filles en raiſon de 104 ou 105 à 100. M. Dan. Bernoulli, dans un Mémoire du Tome XIV. des Nouv. Comment. de l'Académie, a appliqué le calcul de probabilité à cette eſpéce de phenoméne, qui après tant de preuves, doit être conſideré comme une loi générale de la Nature établie par une ſage vue de laprovidence qui préſide à la conſervation de la race humaine.

 3.)

3.) Dans les tables de St. Pétersbourg on ne fait aucune mention des naiſſances jumelles; la choſe vaudroit cependant bien la peine.

IV. Fécondité générale.

1.) Le nombre annuel des naiſſances a été 5889; calcul moyen de 5 ans. On en trouve le rapport à celui de la population ou la méſure de la fecondité générale $= \frac{1}{33}$, c'eſt à dire, que ſur 33 habitans il arrivoit une naiſſance par an. Cette fécondité générale eſt ſenſiblement moindre, que celle qui a ordinairement lieu même dans les grandes villes. À Paris par exemple elle a été dans cette même periode $= \frac{1}{35}$; auſſi pour St. Pétersbourg étoit-elle dans la periode précédente $= \frac{1}{31}$. Elle a donc été dans la derniere periode plus petite, que dans celle-ci, en raiſon de 94 à 100, ce qui eſt une ſuite immédiate de la diminution, que j'ai fait remarquer cy deſſus dans la méſure de la fecondité intentionelle de la derniere période.

2.) La méſure de la fécondité générale d'un pays donne à connoitre le facteur, par lequel on doit multiplier le nombre annuel des naiſſances pour avoir celui des habitans, des quels il eſt impoſſible de reiterer le dénombrement effectif autant de fois que les interets politiques peuvent demander qu'on connoiſſe la population. La détermination de ce facteur pour des Gouvernemens entiers ou meme pour tout l'Empire eſt donc ſans doute un point important de l'Arithmetique politique de la Ruſſie. On ne ſçauroit rien conclure à cet égard des tables de St. Pétersbourg. Pour atteindre en ce calcul à un degré de précifion capable d'ecarter de cette évaluation probable de la population toute erreur de conſéquence, il

il faudroit des liſtes de Provinces entières de toute ſorte & des denombremens conſidérables.

V. Mortalité générale.

1.) Le nombre moyen annuel des morts a été $=5162$ dans lequel il y a eu 3474 hommes & 1688 femmes; calcul moyen de 5 ans. Voyes cy-deſſus le Paralièle des nombres moyens annuels des morts dans les quatre périodes conſécutives.

2.) Le rapport de ce nombre à celui de la population ou la méſure de la mortalité générale a donc été $=\frac{1}{37}$ c'eſt à dire, que de 37 perſonnes il en mourut une par an ou 27 de 1000.

3.) C'eſt ſans doute une mortalité extraordinairement petite & ſans exemple dans une auſſi grande ville. À Paris la méſure de la mortalité générale a été dans cette même période $=\frac{1}{29}$, ou d'un nombre égal de 1000 vivans Paris fit une perte annuelle de 35 au lieu que St. Pétersbourg n'en perdit par an, que 27.

4.) On ne ſçauroit ſoupçonner à cet égard la préciſion des Tables. Voyés les raiſons, que j'ai alleguées en leur faveur, dans mon premier Mémoire pag. 44. remarque 4 & pag. 49. remarque 2.

5.) Il n'étoit aucune année de cette période, où le nombre des naiſſances n'eut ſurpaſſé celui des morts. Le nombre moyen annuel des naiſſances eſt à celui des morts en raiſon de 114 à 100. Voici le parallele de ces rapports dans les quatre periodes conſécutives:

Période.	Rapport du nombre moyen annuel des naiſſances à celui des morts.
de 1764 à 1770	109 à 100
1771 à 1775	104 à 100
1776 à 1780	130 à 100
1781 à 1785	114 à 100

Le rapport de l'excédant des naiſſances ſur les morts au nombre total des morts étoit donc dans la derniere période moindre, que dans la précédente, en raiſon de 7 à 15, & cette diminution a été ſans doute cauſée par les épidemies des fievres chaudes, dont j'ai fait mention cy-deſſus. Il eſt d'ailleurs auſſi d'autres grandes villes, ou l'année commune des naiſſances ſurpaſſe celle des morts. Quoique par exemple dans la derniere période il en eſt arrivé le contraire à Paris; cependant par un calcul moyen de 14 ans on ſçait, que le nombre moyen annuel des naiſſances ſurpaſſe à Paris celui des morts en raiſon de 103 à 100.

6.) L'excédant annuel des naiſſances ſur les morts ne reſultoit dans la derniere période, que des naiſſances fémelles. Dans le nombre moyen annuel des 5162 morts il y a 3474 hommes & 1688 femmes. Donc pour les hommes le nombre moyen annuel des naiſſances eſt inférieur à celui des morts en raiſon de 86 à 100, au lieu que pour les femmes il le ſurpaſſe dans le rapport de 171 à 100.

7.) Le nombre moyen annuel des hommes morts a été ſupérieur à celui des femmes mortes dans le rapport de 206 à 100. Ce rapport extraordinairement fort, & même de beaucoup plus fort, que dans la période précédente, où il n'é-

n'étoit, que de 184 à 100, s'explique par le grand excédant du nombre des hommes ſur celui des femmes à St. Pétersbourg, le dénombrement de 1784 ayant démontré qu'on y comptoit 193 hommes contre 100 femmes; par la mortalité plus grande des hommes, que des femmes, dès l'âge de 20 ans (voyés cy-deſſous pag. 202), & particulierement quant à la derniere période par les épidemies des fievres chaudes en 1784 & 1785 (voyes pag. 187.).

VI. Mortalité ſpéciale de chaque âge.

1. *Nombre des enſans venus morts au monde.*

1.) Dans la totalité de 29445 naiſſances arrivées dans la derniere période il n'y a eu que 52 enfans de nés-morts; il n'y en a eu que 17 ſur 10000, où moins que 2 ſur 1000 naiſſances. Il paroit par nos Liſtes, que ce malheur arrive plus rarement de période en période; car

dans la période de	il y a eu des enfans nés morts ſur 1000 naiſſances	ſur 1000 morts.
1764 à 1770	10	10
1771 à 1775	7	7
1776 à 1780	3	4
1781 à 1785	moins que 2.	2

Dans cette période ainſi, que dans les précédentes, on remarque à cet égard une différence ſenſible entre les deux ſexes. Dans un nombre égal de naiſſances de l'un & de l'autre le nombre des garçons nés-morts, a ſurpaſſé celui des filles venues mortes au monde en raiſon de 13 à 6.

2.) Le nombre extrémement petit des enfans nés-morts à St. Pétersbourg, ſoit qu'on le prenne dans ſon rap-

 port

port au nombre des naiſſances, ſoit dans celui au nombre des morts, eſt toujours un paradoxe presque ſans exemple. Il faut donc l'une ou l'autre de deux choſes: ou les Liſtes ne ſont pas exactes à cet égard, & il faudroit y mettre plus de préciſion: ou la nation ruſſe, même dans une de ſes plus grandes villes, jouit en ce point d'un avantage eminent par rapport à la population. Or les raiſons alleguées dans mon premier Mémoire ne permettent guere de ſoupçonner abſolument la préciſion des Tables à cet égard, & elles ne ſont contredites en rien par les réſultats de celles de la derniere période. Il ſemble, que cet avantage réſulte en grande partie de la facilité de l'accouchement des meres ruſſes; les Liſtes de la derniere période, ainſi que celles des précedentes, démontrent, que de 1000 meres en couche à St. Petersbourg il n'y a, que 8, qui ſont les victimes des travaux de l'enfantement.

2. *Mortalité des enfans nouveaux-nés.*

1.) La méſure de la mortalité ſpeciale de la premiere année de l'âge humain a été dans la derniere periode telle, que de 1000 enfans nouveaux nés & mis vivans au monde il en eſt mort 201 avant de l'accomplir, de façon que la mortalité de la prémiere année de l'age a enlevé un cinquième de toutes les naiſſances, au lieu que dans les périodes precédentes elle en a enlevé plus d'un quart; la mortalité de cet âge, a donc été ſenſiblement diminuée dans cette période, & réduite même à ſes limites ordinaires. Il eſt remarquable, que la différence, qu'on obſerve dans la mortalite de cet âge de l'un & de l'autre ſexe, a été extraordinairement forte dans la derniere période; car de 1000 garçons nouveau-nés il ne ſont morts dans la premiere année, que 147; au lieu que d'autant de filles 310 ſont mortes avant que de l'accomplir; le rapport de ces deux nombres eſt celui de 10 à 21; dans les perio-

périodes précédentes il étoit de 10 à 14. C'eſt dans ces rapports, que la mortalité des garçons a été inferieure à celle des filles dans la premiere année de la vie des uns & des autres.

2.) Malgré le tableau ſatisfaiſant qu'offrent à cet égard nos Liſtes de la derniere période, celles des précédentes démontrent cependant, que la mortalité de cet âge là, quoique moindre à St. Petersbourg, qu'ailleurs, y eſt pourtant ordinairement plus forte, qu'elle ne devroit être ſelon le cours ordinaire de la Nature. On connoit les cauſes *générales* de la forte mortalité des enfans dans la premiere année de la vie; il eſt de l'interet d'un État d'en rechercher les cauſes *particulieres & locales.* Les tables ruſſes des Provinces entieres pourroient, à cauſe des différences du Climat, des moeurs, des nourritures & des coutumes des habitans, répandre d'heureuſes lumieres ſur cet important objet.

3.) Parmi les cauſes du mal on doit compter auſſi le ſervice trop répandu des nourrices. Deparcieux, dans ſon eſſai ſur les probabilités de la vie humaine, détaille amplement les dommages de différente eſpèce, qui en réſultent pour les enfans, pour les meres & pour l'état. J'ai ſouhaité dans mon premier mémoire, que nos Liſtes marquaſſent pour chaque enfant mort à cet âge là, s'il a été allaité par ſa mere ou par une nourrice. Il ſeroit intéreſſant auſſi, qu'elles indiquaſſent pour chaque mere, morte par une ſuite de ſes couches, ſi elle a nourri elle même ſon enfant ou non.

4.) La mortalité des enfans nouveau - nés eſt un des points, ſur lesquels il ſeroit le plus à déſirer qu'on eut des Tables des gens de Campagne & des Provinces entières. Ce ſeroit, il me ſemble, une choſe très utile ſous ce point de

vûe,

vue, que de diſtribuer au clergé dans tous les Gouvernemens une inſtruction populaire ſur les maladies des enfans, & ſur le traitement phyſique, qu'il convient raiſonablement de donner aux enfans malades ſelon le genre de leur maladies *indépendemment de la médicine.* Ces connoiſſances ſe répandroient par là de plus en plus parmi le peuple & pourroient être un moyen de conſerver nombre d'enfans & de citoyens à la patrie, qui ne ſont les victimes, que de l'ignorance & du préjugé. Suppoſant un million pour le nombre annuel des naiſſances dans toute la Ruſſie, & un cinquième des naiſſances pour le nombre des enfans enlevés dans la prémiere année de la vie; il s'en ſuit, qu'en ne ſauvant qu'un de 100, on procureroit chaque année à la patrie un gain de 2000 citoyens.

3. *Mortalité de l'Enfance.*

1.) Ce que j'ai dit à cet égard dans mon premier Mémoire, touchant la conſtitution forte & vigoureuſe de la nation ruſſe, & le degré ſupérieur de vitalité, que la Nature ſemble lui donner, eſt confirmé auſſi par les réſultats des Liſtes de la derniere période. La méſure de la mortalité de l'Enfance a été telle, que de 1000 enfans tous agés d'un an 803 accompliſſent la 15^{ieme} année & qu'il n'y en a que 197 d'enlevés par la mort pendant cet intervalle de temps. Le Parallèle donné à cet égard dans l'endroit cité fait voir, qu'une ſi forte vitalité de l'enfance eſt peut-être ſans exemple. La moitié de toutes les naiſſances à St. Pétersbourg eſt encore en vie à l'âge de 25 ans aulieu qu'ailleurs elle eſt déja au tombeau avant l'âge de 10 ans, & par exemple à Londres même avant l'âge de 5 ans.

2.) Cette mortalité de l'Enfance, heureuſement ſi petite pour les enfans en général, enleve bien moins de garçons que

que de filles; car de 1000 garçons, tous agés d'un an, il n'en meurt que 161, avant que d'accomplir la 15me année, au lieu que d'autant de filles toutes agées d'un an, 289 en ſont les victimes dans cet intervalle des âges. La mortalité des filles, qui ſurpaſſe dans la premiere année de la vie celle des garçons en raiſon de 21 à 10, la ſurpaſſe dans l'intervalle entre la premiere & la ſeizieme année, dans le rapport de 18 à 10. La moitié de toutes les naiſſances males prolonge ſa vie presque jusqu'à l'âge de 30 ans, au lieu que la moitié de toutes les naiſſances fémelles eſt déja moiſſonnée par la mort avant l'age de 15 ans.

4. *Mortalité du moyen âge & de la vieilleſſe.*

1.) Après une ſi forte & avantageuſe vitalité de l'enfance, que nous venons de remarquer, il ſurvient tout à coup après la 15me année & ſurtout dès l'entrée dans la 20me une mortalité extraordinairement forte, qui en cauſe une ſubite & funeſte cataſtrophe. J'ai taché d'y répandre autant de jour que poſſible, dans mon premier Mémoire auquel je me rapporte ici pour n'y ajouter que ce que nos liſtes de la derniere période nous apprennent touchant ce phénomène auſſi desavantageux qu'inattendu & dont il doit ſans doute importer beaucoup à l'État de rechercher la véritable ſource. Nos tables démontrent, que cette mortalité eſt grande en général. De 1000 perſonnes toutes agées de 20 ans il n'y en a que 178 qui accompliſſent la 60me année & qu'il-y-en a 822 d'enlévées durant cette belle période de la vie, conſéquemment 278 plus que dans d'autres pays en général & 102 plus, que même à Londres, qui ſe diſtingue des autres grandes villes par ſa plus grande mortalité dans toutes les périodes jusqu'à la 60me année de la vie (Susmilch. P. II. p. 348). Cette mortalité, grande en général, l'eſt beaucoup plus pour les hom-

mes que pour les femmes. De 1000 hommes tous agés de 20 ans il en meurt dans le dit intervalle des âges 865, au lieu que d'autant de femmes toutes agées de 20 ans il n'y en a que 695, qui en ſont les victimes pendant la même période. Le rapport de ces nombres eſt celui de 10 à 13 à peu de choſe près.

2.) Nos tables font voir auſſi, que cette grande mortalité vient tout ſubitement après une grande vitalité. La mortalité de l'enfance eſt dans l'intervalle de l'âge de 10 à 15 ans ſi petite, qu'il ne meurt qu'un de 47 mâles & une de 29 femelles. Ce terme paſſé, la choſe change tout à fait de face; dans la période de la 20me à la 25me année de l'âge la mortalité eſt ſi grande, que dans cet intervalle de 5 ans il meurt un de 9 mâles & une de 13 femelles. La mortalité des hommes, qui dans la période de la 10me à la 15me année de l'âge étoit inférieure à celle des femmes en raiſon de 3 à 5 à peu de choſe près, devient tout à coup plus grande que celle-cy, en raiſon de 3 à 2. Enfin nos tables démontrent auſſi, que cette forte mortalité exerce ſes ravages par des fievres chaudes & des maladies de conſomption.

3.) D'après cette remarque il eſt aiſé de conjecturer, que le nombre des vieux gens à St. Pétersbourg ne ſauroit être qu'aſſés petit. De 1000 enfans nouveau-nés il n'y a que 3, qui atteignent l'âge de 90 ans; & la probabilité de fournir cette carriere eſt moindre pour les mâles, que pour les femelles, en raiſon de 2 à 5.

4.) Cependant dans ce petit nombre des vieillards il en eſt quelques uns, qui touchent au dernier âge de la vie humaine; car dans la derniere période il y a eu 6 perſonnes, mortes à l'âge de plus d'un ſiecle.

VII.

VII. Force des maladies & état de la ſanté publique.

J'ai expoſé ſuffiſamment dans mon premier Mémoire ce qu'il ſeroit à déſirer qu'on fit pour perfectionner à cet égard les Tables de St. Pétersbourg & quelle ſeroit l'utilité, qui réſulteroit d'une Topographie médicinale de la Ruſſie, à la quelle de pareilles Tables étendues à des differentes Provinces de l'Empire pourroient ſervir de baſe. Je me borne içi à un expoſé des remarques que les liſtes de la derniere période telles qu'elles ſont, ont pu me fournir ſous ce point de vue.

1.) Les maladies, qui dans la derniere période ainſi que dans les précédentes, ont cauſé le plus de mortalité, ſont les Pleureſies, les Fievres chaudes & les Conſomptions. Voiçi les nombres moyens annuels de ceux, qui ont été les victimes de ces trois maladies:

	Hommes.	Femmes.	Sommes.
Pleureſie -	723	579	1302
Fievre chaude	1364	275	1639
Conſomption	557	284	841
	2644	1138	3782

Or le nombre moyen annuel de tous les morts ayant été = 5162; il s'enſuit, que ces trois maladies enſemble y ont contribué pour plus de $\frac{5}{7}$ & nommément les Pleureſies pour presqu'un quart, les fievres chaudes pour un tiers & les Conſomptions pour un ſixieme. On voit auſſi, que la force de ces maladies à été moindre pour les femmes que pour les hommes.

2.) De toutes les maladies des enfans celles, qui ont fait le plus de ravage, ſont les Convulſions & la petite Vérole. Les convulſions ont enlévé annuellement 204 enfans,

110 mâles & 94 femelles; c'eſt la 29me partie de toutes les naiſſances. Telle a été auſſi la mortalité cauſée par la petite vérole naturelle, qui a moiſſonné annuellement 208 enfans, 101 mâles & 107 femelles. Cette maladie eſt incomparablement plus meurtriere en beaucoup d'autres endroits, qu'à St. Pétersbourg. Ailleurs elle met ordinairement au tombeau un 14me de toutes les naiſſances; à St. Pétersbourg ce ne fut dans la derniere période qu'un 28me de la totalité des naisſances, qui en étoit la victime. Cependant la malignité de cette epidémie a été dans la derniere période bien plus grande, que dans les périodes précédentes, où elle n'a enlévé qu'un 35me de toutes les naiſſances. Dans les cinq ans de la derniere période la petite vérole naturelle a couté la vie à 1045 enfans. Sept fois ce nombre ou 7315 a donc été probablement le nombre des malades de la petite vérole à St. Pétersbourg dans le même intervalle de temps. Il n'en feroit mort probablement que 22, en raiſon de 3 par 1000, s'ils avoient été inoculés; l'établiſſement bienfaiſant de l'Inoculation, fait par notre très Auguſte Souveraine en 1768 de la maniere la plus encourageante, auroit donc pu dans cette ſeule période & dans une ſeule ville ſauver la vie à 1023 enfans, s'il y étoit en vogue autant, qu'il pourroit & devroit l'être. Ce ſeroit ſans doute contribuer beaucoup au crédit de cette inſtitution ſalutaire, que de publier l'hiſtoire des maiſons d'Inoculation établies en Ruſſie. Il ne ſeroit non plus ſans intérêt, d'avoir les Liſtes de mortalité des maiſons des Enfans trouvés; elles méritent toute attention ſous plus d'un point de vüe.

3.) En prenant le nombre moyen, il y avoit dans la derniere periode annuellement 27 perſonnes, qui ont péri par differens accidens. Dans tout l'intervalle des cinq ans ils ont couté la vie à 138 perſonnes, 108 hommes & 30 fem-

femmes. Le nombre moyen annuel de ces malheureux a donc été dans la derniere période de la moitié moindre que dans les périodes précédentes. Le titre: *malheurs*, ſous lequel on marque dans nos tables le nombre des perſonnes, qui ont peri par toute ſorte d'accidens, eſt ſans doute trop général & trop vague pour qu'il ſoit poſſible d'en tirer des lumieres capables de mettre le Gouvernement ſur la voie d'en prévenir quelques uns & autant que poſſible; il importe pour cet effet, comme j'ai fait voir dans mon premier Mémoire, de ſpécifier ces accidens & il faudroit corriger à cet égard les modeles des Tables & leur donner en ce point les détails néceſſaires.

4.) Le nombre moyen annuel des corps trouvés morts a été dans la derniere période de 47 perſonnes; 43 hommes & 4 femmes. Il a donc été presque trois fois moindre, que dans les périodes précédentes. L'an 1781 il a été extraordinairement fort. Dans tout l'intervalle des cinq ans on en a trouvé 239, parmi lesquels il y eut 217 hommes & 22 femmes.

5.) Il feroit à déſirer auſſi pour le bien de l'humanité, que les Tables continſſent un regiſtre des morts arrivées dans les Hôpitaux & les priſons, & ſurtout un expoſé des genres des maladies; l'ordre Impérial en fait une expreſſe mention.

6.) La révolution périodique de la mortalité, rélativement aux ſaiſons & aux mois de l'année, a été dans la derniere période ſenſiblement la même, que dans les périodes précédentes. Les mois de Septembre, Octobre & Novembre ont été ceux, où il eſt mort le moins de monde; la mortalité s'eſt augmentée enſuite, & elle a pris, ſans ſe rallentir que tant ſoit peu au mois de Février, des accroiſſemens continuels jusqu'au mois de Mai, où elle a enlévé le plus de

 monde;

monde ; après quoi elle s'eſt diminuée de mois en mois jusqu'à celui d'Octobre. Par rapport aux quatre ſaiſons aſtronomiques de l'année, nos Tables démontrent, que de 1000 morts dans la derniere période, il en eſt mort

283 au Printemps 262 en Été 216 en Automne 239 en Hyver	Donc en hyver il meurt à St. Pétersbourg moins de monde, que pendant l'été. Voyés la deſſus mon premier Mémoire pag. 63.

VIII. Méſure des progrés de la population à St. Pétersbourg.

1.) L'expreſſion la plus claire que les Tables puiſſent nous préſenter, du degré de la *vigueur* de la population dans chacune des 4 périodes conſécutives à St. Petersbourg, c'eſt le rapport de l'Excedant annuel des naiſſances ſur les morts au nombre total des vivans. Or ſuppoſant celui-ci pour les trois premieres périodes tel, que je l'ai établi dans mon premier Mémoire (pag. 43.), & tel, qu'un denombrement effectif l'a donné pour la quatrième, on obtient

pour la période de	le rapport de l'excédant annuel des naiſſances ſur les morts au nombre total des vivans, comme.
1764 à 1770	10 à 3568 ou 28 à 10000
1771 à 1775	10 à 8173 ou 12 à 10000
1776 à 1780	10 à 1317 ou 76 à 10000
1781 à 1785	10 à 2647 ou 38 à 10000

enſorte que les nombres 28, 12, 76 & 38 repréſentent les degrés d'une eſpece de Thermomètre politique, qui nous apprend

prend les degrés de la vigueur de la population à St. Pétersbourg dans chacune de ces quatre periodes : Tirons en les concluſions ſuivantes :

a) dans les quatre périodes conſécutives à St. Pétersbourg la vigueur de la population a été la plus foible dans la période de 1771 à 1775.

b) elle a été la plus forte dans la période de 1776 à 1780.

c) la vigueur moyenne de la population dans tout l'intervalle des quatre périodes a eté de 38 degrés, c'eſt à dire, que le rapport de l'excédant moyen annuel des naiſſances ſur les morts au nombre total des vivans parmi lesquels il a lieu, eſt celui de 38 à 10000.

d) l'eſpace de variation ou l'intervalle entre la plus foible & la plus forte vigueur de la population a été de 64 degrés; la plus forte a été à la plus foible en raiſon de 6 à 1; ce qui indique l'action des cauſes fort énergiques, dont l'une a fait baiſſer le Thermomètre de population dans la période de 1771 à 1775 & dont l'autre l'a fait monter ſi heureuſement dans la période immédiatement ſuivante.

2.) On obtient les mêmes concluſions, en calculant le temps du doublement de la population pour chacune des quatre périodes. Voici les réſultats de ce calcul :

La vigueur de la population dans la période de	a été telle, qu'elle auroit été doublée après.
1764 à 1770	247 ans.
1771 à 1775	578 ——
1776 à 1780	91 ——
1781 à 1785	183 ——

En

En prenant la vigueur moyenne de la population, que nous venons de trouver de 38, 5: enſorte que l'excédant annuel des naiſſances ſur les morts eſt à la totalite des vivans comme 38, 5 à 10000 ou comme 1 à 260, on trouve, que la vigueur de la population à St. Pétersbourg, par un calcul moyen de 22 ans, eſt telle, que par un effet permanent de cette vigueur la population s'y doubleroit après 180 ans.

Telles ſont, en abrégé, les remarques principales, que j'ai eu lieu de faire ſur les Tables de St. Pétersbourg pour la derniere période, lesquelles jointes à celles, que j'ai propoſées dans mon premier Mémoire, s'étendent maintenant ſur une ſuite de 22 années conſécutives. On a raiſon, ſans doute, d'attribuer à des réſultats d'une telle eſpece d'autant plus de probabilité & de préciſion, plus eſt grande l'étendue du temps, qu'ils embraſſent, vû que les effets des cauſes variables, locales, morales, politiques, qui modifient la marche conſtante & réguliere de la Nature, deviennent inſenſibles en ſe compenſant les unes par les autres, dans un très grand nombre d'obſervations. D'un autre coté la rédaction de pareilles Tables d'année en année, & leur réſumé raiſonné de période en période, ſurtout ſi elles ſont étendues à des Provinces entières, n'eſt pas d'une moindre importance pour le Gouvernement, parceque ce ſont préciſement ces éffets des cauſes variables & ſujettes à ſon reſſort, qu'il lui importe infiniment de connoitre; & que la connoiſſance de ces éffets le met à portée d'operer de la maniere la plus énergique ſur la conſervation, l'accroiſſement & le bonheur de ſes citoyens & le bien de l'humanité.

PHY-

PHYSICA.

DE ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Diſſertatio VIII.

DE FIBRIS MEDIIS VENTRICVLI DEXTRI.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. d. 21 *Iuin* 1787.

Pars Prior.

Mediarum fibrarum, externarum reſpectu, diſpoſitio.

Mica, nec admodum facilis perſpectu, diſpoſitio et ordo mihi fuit fibrarum ventriculi dextri in vniuerſum. Vti a duabus tertiis circumferentiae ventriculi partibus externae fibrae, a baſi nempe ventriculi et arteriarum, pulmonalis et aortae, tum porro a ſtria, originem ducunt, in vnam, quae ſupereſt, crenam, inſeruntur; diu ſpeculatus eram, et fibras conſiderando medias detectas ipſas, et, quod dudum mihi intellexiſſe videbar, conſilium cogitando naturae, in praecedenti diſſertatione expoſitum, quod quippe non prorſus mihi cum

 obſer-

obſeruata illa diſpoſitione fibrarum mediarum conſentire videbatur, quisnam ergo verus naturae finis, aut quod inſtitutum in diſponendis ventriculi fibris in vniuerſum eſſet? Ita enim manifeſto ſiniſtri ventriculi ſtrata ex aliis ſucceſſiue circumferentiae partibus ventriculi oriuntur, in aliasque inſeruntur, oppoſitas illis, vt quantum fieri poſſet, in omnes regiones fibrae productae eſſent. Quo mediae ergo ventriculi dextri fibrae, decuſſando externas, a ſola deberent ſtria oriri, omiſſis filis cartilagineis et baſi aortae, quo pars omnino ventriculi baſilaris medio ſtrato careret. Verum repletam non modo fibris vniuerſam baſilarem partem inueneram, ſed ortae illae manifeſto quoque videbantur a filo cartilagineo anteriori dextro et a baſi aortae. Quo vel eadem omnino externarum fibrarum diſpoſitio repetita in mediis erat, vt proprio vſu hae fibrae carerent, vel prorſus tamen turbatus ordo, et lex illa, quam ſibi in diſponendis fibris natura praeſcripſiſſe videbatur. Denique me ipſum incuſaui, tardiſſimum, qui non pridem rem adeo claram, apertamque intellexiſſem. Non enim oriuntur, quae partem baſilarem replent, mediae fibrae a filo cartilagineo anteriori dextro; non oriuntur a baſi aortae, haud magis, quam ab arteriae pulmonalis baſi; ſed inſeruntur in eas partes, in easque, quas dixi, ſedes. Quo certe multo etiam magis, quam quidem putaueram, fida ſibi natura et conſtans in his operibus ſuis, et obediens manet legibus, quas ipſa ſibi praeſcripſerat.

Ortus fibrarum mediarum in uniuerſum Tab. IX. a. c. d. e. f. g. 25. 30. 44. 65. 74.

Vti duas ergo tertias partes circumferentiae ventriculi externae fibrae, baſilarem totam, arteriae pulmonalis aortaeque ba-

baſin (*a*), et filum cartilagineum dextrum vtrumque (*b*), deinde totam ſtriam (*c*), pro ortu recipiunt, ſolam tertiam, crenam relinquunt pro inſertione (*d*); vnam mediae contra pro ortu ſumunt circumferentiae partem, duas pro inſertione relinquunt. Oriuntur in inferiori ventriculi ſuperficie a tota ſtria (*e*), quam ab initio quidem, a cordis ſcilicet baſi, ad finem vsque, ſeu apicem cordis, orientibus ſuis fibris occupant. Neque ab vlla parte, quae ad baſilarem portionem circumferentiae pertinet, faſciculus vllus, aut vlla fibra, niſi ad varietates reſpicias, ad medium ſtratum concurrit; vt bina fila ergo cartilaginea dextra, et baſis aortae et arteriae pulmonalis baſis in poſteriori aeque ac anteriori latere ſuo, quae partes ſcilicet plurimas, easque maxime inſignes, faſcias ad ſtratum externum ſuppeditauerant, liberae ſint ab orientibus fibris ſtrati medii. Non deſunt exempla mihi, in quibus etiam a filo cartilagineo anteriori fibras oriri, ſeſeque immiſcere viderim fibris baſilaribus. Verum cum nullas earum, niſi ſemel tantum atque in vnico corde inuenerim; ad varietates illae merito ſunt referendae.

Progreſſus in vniuerſum. (Tab. IX. VIII. VII.).

Ab omni ſic ſtria in inferiori cordis ſuperficie mediae fibrae ortae ea ratione verſus marginem ventriculi dextri excurrunt (*f*), vt, reputatis omnibus, a ductu transuerſali progreſſus earum parum differat quidem, at paululum tamen omnino verſus baſin adſcendat. Variae ſcilicet faſciae ſunt, qua-

(*a*) Tab. II. 10. 12. 13. Tab. V. 2. 1 53. 51. 6. 9. 14. 15.
(*b*) Tab. II 15 17. H. Y. Tab. III. D. E. 57. 58. Tab. V. 15. 16. 17. 19. Tab VI. 82. 83 84. 85 87. 88
(*c*) Tab. III D. F. 55. 70 Tab. VI. C. 83. 3. 45.
(*d*) Tab I. C D Tab IV. D. E.
(*e*) Tab IX a. c. e f. g. 25 74.
(*f*) Tab. IX. 2,. 30. 37. 45. 65. 73.

rum aliae manifeſto adſcendunt, (*a*) aliae transuerſim progrediuntur, (*b*) quaedam etiam oblique quodammodo deſcendunt (*c*); ſed maxima pars tamen earum adſcendit, et paucae tantummodo fibrae deſcendere inueniuntur. Externae fibrae, quamuis proximae pariter ductui transuerſo, paululum tamen omnino verſus apicem inclinando deſcendebant. (*d*) Sic mediae ergo, angulis licet acutis, ſatis tamen manifeſto in inferiori hac ventriculi ſuperficie externas decuſſant. Flexae circa marginem mediae fibrae, quae apicis in inferiori ſuperficie regionem tenuerant (*e*), euaneſcunt omnino, vel ad ſe mutuo ſe applicando, vel tranſeundo in fibras internas; vt nulla earum in ſuperiori ſuperficie appareat. Quae partem occupauerant ventriculi mediam, ventralem; (*f*) quae baſi propiores angularem tenebant partem in ſuperficie inferiori, (*g*) hae omnes in ſuperiorem tranſeunt, in eaque continuo eam affectant viam, acſi perpendiculariter incurſurae eſſent in baſin arteriae pulmonalis (*h*). Media tamen itineris parte ſuperata, flectuntur, et transuerſim fere, baſique parallelae arteriae pulmonalis, in crenam incurrunt. (*i*) Quae iuxta ipſum ſilum cartilagineum poſterius in inferiori ſuperficie tranſierant (*k*), baſin ipſam cingendo ventriculi, hae in ſuperiori ſuperficie, parallelae margini baſilari, partim iuxta hunc marginem (*l*), partim

(*a*) Tab. IX. 30. 31. 32. 37. 38.
(*b*) Tab. IX. 41. 44. 66. 73.
(*c*) Tab. IX. 45. 57.
(*d*) Tab. III. 57. 58. 61. 62. 63. 64. Tab. VI. 84. 83. 91. 92, etc.
(*e*) Tab IX. 49. 74.
(*f*) Tab. IX. 39. 49.
(*g*) Tab. IX 29. 39.
(*h*) Tab. VII. m. n v. x. z. 2. 13.
(*i*) Tab VII. p. q. r. s. t. 4. 13. 20. 21.
(*k*) Tab IX. 25. 26. a. b. bb. 27.
(*l*) Tab. VII. m. n.

partim in margine ipſo, (*a*) verſus arteriam pulmonalem decurrunt ad baſin vsque coni arterioſi (*b*), vbi et hae fibrae, magis magisque curuatae, transuerſim demum in crenam tranſeunt. Vt nulla harum fibrarum, recta a ſtria productarum, in ſuperficiem baſilarem ingrediatur; eaque ſuperficies ergo harum fibrarum reſpectu omnino, vt ordo fibrarum cordis praeſcriptus poſtulat, praetereatur.

Baſiliarum fibrarum ortus et progreſſus in ſpecie (*Tab. VIII.*).

Dum ſuper ventriculi vero angulum hae fibrae ex inferiori in ſuperiorem ſuperficiem progrediuntur (*c*), in ipſo vt continuent margine baſilari, aut iuxta eum vt pergant in ſuperiori ſuperficie (*d*), partem omittendo baſilarem totam; inſignis ſub marginalibus his fibris faſciculus prodit (*e*), iuxta marginem pariter, ſed in baſilari ſuperficie (*f*), verſus arteriam tendens pulmonalem (*g*). Sub eo aliae rurſus faſciae prodeunt, quae diſperſae totam baſilarem ventriculi ſuperficiem replent (*h*) quam fibrae, a ſtria ortae, omiſerant. Sic duplex fibrarum genus eſt, quo medium ſtratum ventriculi dextri efficitur: fibrarum alterum, a ſtria ortarum, vtramque ventriculi, inferiorem et ſuperiorem, ſuperficiem ſuo decurſu occupantium; alterum baſilarium fibrarum, quae ortae a prioribus, vbi ad interſtitium inter fila cartilaginea dextra ductum filo-

(*a*) Tab. VII. m. l. g.
(*b*) Tab. VII. g.
(*c*) Tab. IX. 27. 28. 29. 34.
(*d*) Tab. VII. l m. n.
(*e*) Tab IX. 29. a.
(*f*) Tab. VIII. s. s.
(*g*) Tab. VIII. s. t.
(*h*) Tab. VIII.

filorum illac deſerunt, (*a*) marginemque ſequuntur baſilarem, radiatim quaſi ſuper baſilarem partem ſeu flabellatim ſe extendunt.

Mutua mediarum fibrarum et externarum decuſſatio.

Vbique ergo omnino, ſed gradu in ſedibus diuerſis diverſo, mediae fibrae externas decuſſant. Parum quidem in inferiori ſuperficie haec decuſſatio variat. Mediae fibrae in ductum oblique adſcendentem ex transuerſo, (*b*) externae in descendentem oblique (*c*), leuiter declinant, et angulis ergo, ſemirecto paulo minoribus, externae mediaeque ſe mutuo cruciant. Mira vero in ſuperiori ventriculi ſuperficie decuſſationis diuerſitas eſt. Maxima omnium in parte angulari, indeque ſurſum ſecundum marginem baſilarem ad baſin fere coni arterioſi vsque, deorſum per marginem ventralem ad apicis vsque regionem, atque in tota ſic parte quaſi ventriculi venoſa, invenitur. In his ſedibus enim externae fibrae maximam partem parallelae baſi arteriae pulmonalis et perpendiculares ad marginem baſilarem decurrunt (*d*), mediae parallelae contra margini baſilari procedunt, et perpendiculares ad baſin arteriae pulmonalis. (*e*) Vt parum ergo abſit, quin angulis rectis vtraeque ſe mutuo decuſſent. Certe ſemirecto multo maioribus in vniuerſa hac deſcripta regione, in angulari ſcilicet et ventrali, ſeu venoſa circiter, ventriculi parte hac fibrae ſe cruciant inuicem. Crenam verſus, (*f*) vti et in toto cono arterioſo,

(*a*) Tab. IX. 28.
(*b*) Tab. IX. 31. 38. 41. 44. 65. etc.
(*c*) Tab VI. 83 91 92 etc. Tab. III. 62. 64. etc.
(*d*) Tab. I. 14. 14. 15 16. 29. 24. 32. 50: Tab. IV. 7. 7. 14. 15 29. 32. 33.
(*e*) Tab VII. l. m. n w. v. 3. z. 12.
(*f*) Tab. VII. d. t. 14 23.

rioſo, (*a*) et in infundibuli parte ſiniſteriori, crenaeque propiori, (*b*) minoribus longe ſemirecto angulis fibrae ſtratorum ſe decuſſant. Quae fibrae enim mediae in angulari pariter ac ventrali parte a dextro ventriculi margine recta verſus baſin arteriae pulmonalis adſcendunt, in media ſuperioris ſuperficiei parte adeo curuatae flexaeque ſuam directionem mutant, vt transuerſim non modo, ſed omnino deſcendendo quoque oblique et parallelae baſi arteriae pulmonalis in crenam denique tranſeant (*c*). Qua eadem quoque externae fibrae directione cum progrediantur, niſi vt magis paulisper oblique deſcendant; vix mediae ſane externas, nec niſi angulis acutiſſimis, in his pulmonali arteriae et crenae propioribus ſedibus decuſſant. Vt in vniuerſum ergo maxima directionis differentia inter fibras externas mediasque in iis ſit ſedibus regionibusque, quae ad partem pertinent venoſam ventriculi, minima in iis, quae arterioſam eius partem efficiunt.

Mediarum fibrarum inſertio in vniuerſum. (Tab. VIII. e. l. i. k. g. w. Tab. VII. c. f. r. 25.)

Vti a baſis ventriculi partibus, filo nimirum cartilagineo dextro vtroque, et baſi aortae arteriaeque pulmonalis, fibrae externae, deinde a tota ſtria, oriuntur, in ſolam inſeruntur crenam; a ſola ſtria contra mediae ortae in ſingulas illas et baſis ventriculi partes ſimul, modo enumeratas, et in crenam inſeruntur. Iam primae, a primo ſubortae principio ſtriae, non adeo transverſo propinquae ductui ſunt, aut parallelae cartilagineo filo dextro poſteriori, quin, angulis licet acutiſſimis, in

(*a*) Tab. VII. g. o. h. b. d. k.
(*b*) Tab. VII. s. t. 14.
(*c*) Tab. VII. q. s. 9. 20. 21. h. r. t.

in ipſum hoc filum inſerantur. (*a*) Deinde idem faſciculus, a ſtriae principio ortus, (*b*) qui primas ſuas fibras cartilagineo dederat filo poſteriori, reliquis ſuper angulum dum tranſit cordis dextrum, (*c*) alium faſciculum emittit, (*d*) et hic porro alios, (*e*) qui totam baſilarem partem ſuis fibris replent, quemadmodum in ſuperioribus dictum. Hae fibrae baſilares, filum ſucceſſiue cartilagineum dextrum anterius, (*f*) deinde baſin aortae (*g*), foveaeque triangularis dexteriorem oram (*h*), vnde circumflexus dexter ſuperior in externis ortus erat, denique et baſis arteriae pulmonalis poſterius latus, (*i*) et angulum huius baſis dextrum (*k*), et aliquam tandem portionem quoque dexteriorem, quaſi dimidiam, lateris anterioris in ſuperiori ventriculi ſuperficie (*l*) ſua inſertione occupant. Faſciculus baſilaris primus ipſe (*m*), ad baſin coni arterioſi vſque in baſilari ſuperficie progreſſus, in ſuperiorem inde flexus (*n*), et primus a ſtria ortus faſciculus, et reliquae fibrae omnes a ſtria ortae mediae, in crena ſuam inſertionem habent.

Sic

(*a*) Tab. IX. 25. 26.
(*b*) Tab. IX. a. b.
(*c*) Tab. IX. b b. 27. 29.
(*d*) Tab. IX. 29 a. Tab VIII. 5. 5.
(*e*) Tab. VIII. o. i. w. k. l. m. n.
(*f*) Tab. VIII. n.
(*g*) Tab. VIII. m. l.
(*h*) Tab, VIII. k. i.
(*i*) Tab. VIII. g. h.
(*k*) Tab. VIII. w.
(*l*) Tab. VII. A. b. d.
(*m*) Tab. VIII. s. s. t.
(*n*) Tab. VIII. v. t. Tab. VII. c. g. h.

Diuergentia fibrarum mediarum.

Sic, vti radiatim fibrae externae, a duabus circumferentiae ventriculi partibus tertiis collectae, (*a*) in vnam (*b*) tranſeunt; radiatim pariter mediae, verum diſperſae, ab vna eius circumferentiae tertia parte (*c*) in duas (*d*) diſcurrunt. Ortus nimirum fibrarum et faſciculorum baſilarium obliquus ex primis a ſtria ortarum fibrarum, quibus totum ſcilicet filum cartilagineum anterius baſesque aortae et arteriae pulmonalis occupantur, (*e*) plurimum ad radiatam hanc mediarum fibrarum diſperſionem contribuit. Aliquid, ſed parum, curuatae etiam crenam verſus fibrae, a ſtria ſubortae, conferunt.

Earundem in faſcias diſpoſitio.

In faſcias mediae fibrae ventriculi dextri maximam partem, ſicut externae, diſtinctae ſunt. Pauci, vel duo, in baſilaribus faſciculi dantur, longiores, teretiuſculi. (*f*) Reliquae, tum baſilares, tum quae ſuperficies ventriculi occupant, ſuperiorem inferioremque, vel planas latiores tenuesque faſcias collectae efficiunt, (*g*) vel ſimplices referunt ſparſas ſeparatasque a ſe mutuo fibras. Idque poſterius in iis maxime ſedibus tantum fieri ſolet, in dextro non modo, ſed etiam in ſiniſtro, ventriculo, vbi ſtrati fibrae ſenſim deficere incipiunt; nimirum in finibus ſtratorum, crenam et apicem verſus in dextro ventriculo, (*h*) cuius fibrae generatim a ſtria verſus crenam producun-

(*a*) Tab. IV. C. F. L. I. A. O. P.
(*b*) Tab. IV. C. E.
(*c*) Tab. IX. a. g.
(*d*) Tab. VIII. n. m. i. g. h. w et Tab. VII. A. B. f. 17. 25.
(*e*) Tab. VIII. n. m. l. k. i. h. g. w.
(*f*) Tab. VIII. s. s. w.
(*g*) Tab. VIII. m. i. g. etc. Tab. VII. w. q. t. 20. etc. Tab. IX. 30. 38 etc
(*h*) Tab. VII. 5. 5 12.

ducuntur, apicem et ſtriam verſus in ſiniſtro, qui fibras in vniverſum a crena ad ſtriam productas habet. Vt frequentiſſimae denſiſſimaeque circa baſin ventriculorum, rariores, tandemque hiatibus factis deficientes, verſus apicem fibrae inueniantur. Sic pariter ergo cum mediis dextri quoque ventriculi fibris comparatum eſt. Maxima pars tamen rite formatas faſcias planas tenues efficit. Paucae circa confinia tantum ſolitariae fibrae diſperſae inueniuntur. Et longae quidem anguſtioresque imprimis in ſuperiori, vti nec minus in inferiori etiam, ſuperficie hac faſciae ſolent eſſe. Non adeo id quidem in hoc corde manifeſtum eſt, cuius in media ſuperiori ſuperficie interruptae fibrae ſunt (*a*). In aliis tamen adeo et longas et anguſtas has faſcias reperi, vt merito tanquam ſingularis ea proprietas mediarum fibrarum ventriculi dextri conſiderari poſſit.

Qua ratione faſciae diſtinctae ſint.

Multis in ſedibus directione fibrarum diuerſa hae faſciae, alterarumque in alteras inſertione, (*b*) vel interruptione quoque fibrarum, (*c*) ſic, vt in ſtrato externo, a ſe inuicem diſtinctae ſunt; imprimis in hoc corde frequentior hic faſciarum nexus obſeruatur. Haud raro tamen parallelae quoque iuxta ſe mutuo decurrentes faſciae longae anguſtaeque manifeſto diſcernuntur, vbi nec vlla ductus diuerſitas, neque inſertio fibrarum earumue interruptio, apparet (*d*). Solo id nempe interſtitio tum aliquo notabiliori, vel faciliori faſciarum ſolubilitate efficitur; de qua re in praecedenti diſſertatione dictum eſt. Celluloſae enim aliqua ſpecies in ea interſtitia deſcendit,

(*a*) Tab. VII. p.
(*b*) Tab. VII. i. f. o. h. 13. 14.
(*c*) Tab. VII. p. y. t. r.
(*d*) Tab. VII. n. v. x. z. Tab. IX. 32. 37.

cendit, connectens faſcias inter ſe mutuo, easdemque vna diſtinguens. Fibrae ſolitariae, quae circa fines medii ſtrati, vbi hoc paſſim deficere incipit, occurrunt, hiatibus ipſis, defectu formatis, diſtinctae ſunt, ſeparataeque a ſe mutuo diſtant. (*a*).

Faſciarum enumeratio.

Vti anguſtiores in vniuerſum faſciae ſunt in medio, quam in externo ventriculi dextri ſtrato, longe plures quoque in eo quam in hoc poſteriori numeraui. Viginti enim, omnibus reputatis, faſciolas reperio, quas ſatis conſtantes eſſe putem, vt pro ſolitis cordis muſculis haberi queant; quas quidem, quamuis ab externis differant eiusdem ventriculi faſciis, cum ſimiles tamen easdemque frequenter aut ſedes occupent in ventriculo eo, tam ſingulari figura donato, aut iisdem a partibus oriantur, aut inſerantur in easdem, eaque ratione haud raro miram cum illis in ſtrato externo ſimilitudinem oſtendant; iisdem nominibus ſaepe, quibus in externis diſtinguendis vſus eram, inſigniui. Ordinem, cum omnes medii ſtrati fibrae a ſola ſtria oriantur, in fila cartilaginea dextra baſesque arteriarum et crenam diſperſae inſerantur; ſecundum ortum et progreſſum ſtriae inſtitui, vt initium ab iis faciam, quae a prima origine ſtriae, a coniunctis nempe filis cartilagineis poſterioribus, oriuntur, indeque ad caeteras, prout ſucceſſiue de ſtriae partibus ſequentibus ad eius extremitatem vsque excurrunt, progrediar. Sunt ergo fibrarum mediarum ventriculi dextri faſciae aut faſciculi ſequentes: 1.) *Faſciculus ſtriae* (*b*) ab ipſa coniunctione filorum cartilagineorum poſteriorum, imprimis a principio ſiniſtri, ortus, radicem ſtriae tegens, inde transuerſim

 in

(*a*) Tab. IX. 52. etc. Tab. VII. 5. 5. etc.

(*b*) Tab. IX. a. b.

in dextri ventriculi ſuperficiem inferiorem excurrens. 2.) *Faſcia marginalis*, ſeu *portio fibrarum angularium prima*, (*a*) marginis baſilaris maximam partem in inferiori et ſuperiori ventriculi ſuperficie cingens, orta ex faſciculo ſtriae, tranſiens in transuerſas ſuperiores, (*b*) inſerta his mediantibus in crenam. Ex hac baſilares omnes, quaeque conum ſimul arterioſum in ſuperiori ventriculi ſuperficie tegunt, fibrae originem ſuam ducunt, oblique a margine eius baſin verſus adſcendendo. 3.) *Fibrae fili cartilaginei poſterioris* (*c*), in filum inſertae cartilagineum poſterius, ortae a latere dextro deſcendentis faſciculi ſtriae. Vt ipſe faſciculus ſtriae, has fibras lateraliter, (*d*) continuatione ſui (*e*) marginalem, producendo, omnes baſilares fibras et fibras coni arterioſi efficiat, reliquae inferioris et ſuperioris ſuperficiei ventriculi fibrae a ſtria oriantur. 4.) *Adductor arteriae pulmonalis maior*, ſeu *anterior* (*f*), ortus ex angulo inter marginalem et filum cartilagineum poſterius (*g*), hinc in baſilarem excurrens ſuperficiem, contiguus margini baſilari ad baſin coni arterioſi vsque (*h*), ibi flexus in ſuperficiem ſuperiorem (*i*), inſertus in partem anteriorem baſis arteriae pulmonalis et in crenam (*k*). 5.) *Adductor arteriae pulmonalis minor*, ſiue *dexter* (*l*), ſecedens a maiori ad baſin coni arterioſi, vbi maior in ſuperiorem ſuperficiem flectitur, inſertus

(*a*) Tab. IX. a. b. 27. 28 29 34. Tab. VII. m. n. p.
(*b*) Tab. VII. q. r.
(*c*) Tab. IX. 25. 26.
(*d*) Tab. IX. 25.
(*e*) Tab. IX. b. b b b b. 27.
(*f*) Tab. VIII. s. t. v. Tab VII. a. b. d. e. f. g. h.
(*g*) Tab. IX. 29. a.
(*h*) Tab. VIII. v. t.
(*i*) Tab. VI. a. c. g.
(*k*) Tab. VII. b. d. e. f. h.
(*l*) Tab. VIII. w. Tab. VII. A. a. b.

ſertus in latus dextrum baſis arteriae pulmonalis. 6.) *Contractor interſtitii valuularis* (*a*), ſecedens ab eodem adductore maiori, dum ex interſtitio ſuo oritur, longitudinemque ſuperficiei baſilaris percurrit. 7.) *Pulmonalis poſterior* in medio ſtrato, ſeu *Contractor coni arterioſi poſterior* (*b*), ab eodem ſecedens in media eius parte inter contractorem interſtitii valuularis et adductorem minorem, vbi ſlectitur, vt in ſuperiorem ſuperficiem tranſeat, inde transuerſim percurrens ſuperficiem poſteriorem coni arterioſi, inſertus in foſſam triangularem. 8.) *Adductor arteriae pulmonalis poſterior* (*c*), ſecedens a pulmonali poſteriori, inſertus in partem poſteriorem baſis arteriae pulmonalis. 9.) *Aorticus* in ſtrato medio (*d*), ſecedens a contractore interſtitii valuularis, inſertus in baſin aortae. 10.) *Fibrae fili cartilaginei anterioris*, ſiue *adductor orificii venoſi* (*e*), ſecedens a latere poſteriori contractoris interſtitii valuularis, inſertus in filum cartilagineum anterius dextrum. 11.) *Fibrae circumflexae ſiniſtrae*, in ſtrato medio, ſeu *muſculus circumflexus ſiniſter*, in alio detectus corde, interrupta continuatione ortus ex adductore maiori, circa latus ſiniſtrum coni arterioſi flexus, inſertus in partem poſteriorem baſis arteriae pulmonalis, ſiniſterius iuxta adductorem poſteriorem. Reliquae poſt marginalem a ſtria ſubortae fibrae, inferiorem ſuperioremque ſuperficiem ventriculi occupantes, eo nunc ſequuntur ordine: 12.) *Faſcia angularis ſecunda* ſeu *inſinuata prima* (*f*), a prima parte ſtriae, in hoc ſtrato apparente, orta, in ſuperiori ſuperficie in marginalem ſe inſinuans. 13.) *Faſcia angularis tertia*, ſeu *inſinuata*

(*a*) Tab. VIII. o.
(*b*) Tab. VIII. h. i. k.
(*c*) Tab. VIII. g.
(*d*) Tab. VIII. l. m.
(*e*) Tab. VIII. n.
(*f*) Tab. IX. 30. 31. 32. 33. 34. 36. Tab. VII. n. v. w.

ſinuata ſecunda (*a*), orta ex parte ſequente ſtriae, in marginalem pariter ſe inſinuans. 14.) *Ventralis prima* (*b*), a parte ſequente ſtriae orta, in transuerſales ſuperiores, iisque mediantibus in crenam, inſerta. 15.) *Ventralis ſecunda* (*c*), a ſtriae parte ſequente orta, in transuerſales pariter ſuperiores, earumque ope in crenam, inſerta. 16.) *Ventralis tertia* ſeu *perforata* (*d*), orta ex parte ſtriae ſequente, verſus marginem in lacinias diſcedens, ad ipſam mediam ventralem partem ventriculi, in ſuperiori et inferiori ſuperficie, hiatum detegens, penetrantem in cauitatem ventriculi, occupatam fibris internis retiformibus (*e*). 17.) *Fibrae ſolitariae ventrales* (*f*), quae vltimae ex ſtria ortae ad ſuperiorem ſuperficiem perueniunt. 18.) *Fibrae regionis apicis* (*g*), quas, ortas in regione apicis a reliquis ſtriae partibus, nonniſi ad marginem vsque continuare potui, inſignes minoribus paſſim hiatibus diſperſis. In his apicis ipſius, in hoc corde eminentis, fibrae breues transuerſae a prioribus diſtingui poſſunt, quae tamen, cum raro apex ventriculi ſeparatus et eminens inueniatur, non conſtantes ſunt. 19.) *Transuerſae ſuperiores* vel *poſteriores* (*h*), partem infundibuliformem ſiniſterius occupantes, productae ab angularibus, diſtinctae ab iis interrupta continuatione, inſertae in crenam. 20.) *Transuerſae inferiores* ſeu *anteriores* (*i*), partem ventralem ſiniſterius occupantes, productae ad vltimas ventrales ex fibris ventri-

(*a*) Tab. IX. 36. 37. 38. 39. Tab. VII. v. x.
(*b*) Tab. IX. 40. 41. 42. 43. Tab. VII. x. z.
(*c*) Tab. IX. 42. 44. 45. 46. 47. Tab. VII. z. 2. 3.
(*d*) Tab. IX. 47. 48. 49 Tab. VII. 2. 12. 9.
(*e*) Tab. VII. 6. 7. 8. 11.
(*f*) Tab. VII. 12. 12. 22. 23.
(*g*) Tab. IX. 49. 74
(*h*) Tab. VII. q. r. s. t.
(*i*) Tab. VII. 13. 14. 15. 20. 21.

ventriculi internis in crenam inſertae. Hae ſingulae faſciae ſunt, quae ſtratum medium ventriculi dextri efficiunt, quaeque ſatis apte ad quatuor vel quinque claſſes reuocari poſſunt: 1.) *angulares* ſcilicet, a prima tertia parte ſtriae ortas (*a*), 2.) *baſilares*, ab angularibus productas (*b*), 3.) *ventrales*, a media parte ſtriae ſubortas (*c*), et 4.) *tranſuerſas*, ex binis, angularium et ventralium fibrarum, claſſibus quaſi continuatas (*d*); quibus 5.) accedunt fibrae regionis apicis, ab vltima parte ſtriae ſubortae (*e*).

Faſciculus ſtriae. (*Tab. IX. a. l. b.*)

Quamuis non eo vsque ſit conſtans *faſciculus ſtriae*, vt in nullo non corpore reperiatur; inter ſolitos tamen omnino referri poteſt muſculos cordis. Paruus, ſatis latus, craſſusque, at breuis, niſi marginalem (*f*), in quem fere continuat, ad eum cenſeas pertinere, muſculus eſt. Oritur compactis fibris carneis a coniunctione filorum cartilagineorum poſteriorum (*g*), proinde a media baſi ſinuum, vbi ſuper principium ſtriae illi contingunt, deinde a prima parte fili poſterioris ſiniſtri (*h*), vt aliqua ſui portione omnino ſiniſtri ventriculi parietem tegat. In alio corde a multo etiam maiore huius fili parte eum oriri vidi, vt totum illum angulum fere (*i*) poſteriorem dexteriorem

(*a*) Tab. IX. 25. 26. 27. 30. 37. 38. 39. Tab VII. m. x. y. p.
(*b*) Tab. VIII.
(*c*) Tab. IX. 40. 41. 44. 48. 49. 43. Tab. VII. x. 12. 1. 18. 19.
(*d*) Tab. VII. q. r. s. t. 13. 14. 20, 21.
(*e*) Tab. IX. 60. 49. 74.
(*f*) Tab IX bb. 27.
(*g*) Tab. IX. a.
(*h*) Tab. IX. a. l.
(*i*) Tab IX. a. m. c.

rem ventriculi ſiniſtri in inferiori eius ſuperficie tegeret; quod tamen nullo modo obſtat, quominus proprius dextri ventriculi musculus ſit, de qua re in ſequentibus dicam. Ab ea ſede ortus musculus fibris ſuis, ſingulari modo contortis, ſuper aliquam paruam portionem ſtriae deſcendit, eamque, vt totam ſtriam in ſtrato externo ſtriae fibrae texerant, portionem eius paruam in ſtrato ſecundo tegit. Tum flexus continuo dextrorſum in dextrum ventriculum excurrit. Vbi vero flectitur, fibrae musculi craſſioris profundae (*a*), e latere diſcedunt, ſuperque ſublimes (*b*) tranſeunt; ſublimes ſub illis ſe recipiunt. Quo ipſo totus terminatus musculus eſſe videtur. Quae ſolae enim hactenus ſublimes fibrae apparuerunt, quaeque propterea musculum totum efficere videbantur, ad profundas ſe applicant fibras, in conſpectum nunc primum prodeuntes, eaque ratione finiuntur. Atque ob eam cauſam, tanquam ſi ſingularis musculus eſſet, proprio fasciculi ſtriae nomine eum inſigniui. Re ipſa tamen fibrae eius profundae (*c*), quae non minus quam ſublimes ad musculum ſtriae pertinent, et quae primum in hac ſede emergunt, in eum, quem marginalem dixi, musculum continuant (*d*).

Eius variationes.

In alio corde maiorem aeque ac elegantiorem hunc ſtriae musculum reperi. A parte longe maiori fili cartilaginei poſterioris ſiniſtri fibrae eius ortae radiatim quaſi et ductibus pulchris ad ſtriae ſedem accedebant, vbi aequali flexione facta in marginalem musculum recta continuabantur. In alio corde omni-

(*a*) Tab. IX. bb.
(*b*) Tab. IX. b.
(*c*) Tab. IX. bb.
(*d*) Tab. IX. 27.

omnino hic muſculus deſuit. Marginalis in eo et fibrae fili cartilaginei poſterioris dextri ab ipſa ſtria oriebantur.

Faſcia marginalis. (*Tab. IX. a. b. bb.* 27. 28. 29. 34. *Tab. VII. m. n. p.*)

Faſcia marginalis, ſeu *muſculus marginalis*, ſiue *angularium fibrarum portio prima*, longiſſimus omnium in hoc medio ventriculi dextri ſtrato muſculus, originem, vt dictum eſt, a fibris faſciculi ſtriae ducit (*a*). Alibi recta ex hoc faſciculo continuat; in hoc corde tamen propriis omnino fibris, et diſtinctis, profundis nempe faſciculi ſtriae, ab eodem, quo natae ſublimes erant, principio fili cartilaginei poſterioris ſiniſtri (*b*) oritur, tectus in hoc ſuo initio ipſis his fibris ſublimibus. Sic primo ſub iis deſcendit, deinde dextrorſum flexus e latere faſciculi dextro in conſpectum prodit (*c*); tranſit ſuper fines fibrarum faſciculi ſtriae (*d*) et ſenſim oblique adſcendit, vt prope finem fili cartilaginei poſterioris marginem iam in inferiori ſuperficie contingat baſilarem (*e*), a filo hactenus ipſo fibris fili ſeparatus (*f*). In alio corde multo citius adſcendentem filum ipſum in media eius parte iam contingere, indeque parallelum et contiguum filo in marginem continuare vidi, ad quem porro et parallelus et contiguus progrediebatur. Quamvis vero filum in hoc corde non attingat, admodum propinquus tamen ad eius finem accedit, vt fere illud tangat (*g*).

 Ea-

(*a*) Tab. IX bb.
(*b*) Tab. IX. a.
(*c*) Tab IX. bb. bb.
(*d*) Tab. IX. b.
(*e*) Tab. IX. 28.
(*f*) Tab. IX 25. 26.
(*g*) Tab. IX. 28.

Eaque ratione, dum in marginem porro continuat baſilarem (*a*), angulum cum interſtitio filorum dextrorum includit, ex quo fibrae baſilares oriuntur (*b*). Hoc ductu, fere transuerſo, contiguus margini baſilari, ad marginem ventriculi dextrum vsque et ad angulum eius musculus venit, cuius ſupremam, ſiue poſtremam, partem quidem occupat, tranſitque flexus (*c*) in ſuperficiem ventriculi ſuperiorem. Sic primam partem dexteriorem anguſtioremque ſuperficiei baſilaris circumdat, quae tanquam ſingularis planities inde, dum cor ex inferiori ſuperficie conſpicitur, apparere ſolet (*d*). Aliquas etiam fibras in ipſam hanc planitiem, ſeu partem extremam dexteriorem ſuperficiei baſilaris mittit; dum maxima pars earum eam ſuperficiem cingit. Nactus ſuperiorem ventriculi ſuperficiem parallelus maximam partem margini baſilari progreditur (*e*) et ad baſin vsque coni arterioſi hoc ductu peruenit (*f*). Id tamen ea efficitur ratione, vt paululum quidem omnino, vbi tranſiit in ſuperiorem ſuperficiem de marginis baſilaris ductu decedat, paulatimque magis in ſuperiorem eam ſuperficiem ſuis fibris deſcendat (*g*). Sic, quae baſilarem intrauerant ſuperficiem, cum circa angulum musculus flecteretur, fibrae pauciores, quae ductu eodem procedunt, ſucceſſiue, alia poſt aliam, marginem naniscuntur baſilarem, eumque et tranſeunt et in ſuperiorem ſuperficiem deſcendunt (*h*), progredientemque in ea ſuperficie musculum fibris augent. In pluribus ſtructuram hanc reperi cor-

(*a*) Tab IX. 28. 29.
(*b*) Tab. IX. 29. a.
(*c*) Tab. IX. 27. 34. 29.
(*d*) Tab. IX. 29. a.
(*e*) Tab. VII. m. n.
(*f*) Tab. VII. l. o.
(*g*) Tab. VII. m. l.
(*h*) Tab. VII. m. l. o. g.

cordibus, vt tanquam ſolita omnino conſiderari poſſit. Magis etiam quam in hoc corde in aliis fibrae declinare a marginis baſilaris ductu ſolent, et plures proinde marginem tranſire; quamuis conſtanter id angulis fiat acutiſſimis. Non longitudinales ergo, aut parallelae, marginem fibrae cingunt baſilarem, aut efficiunt, in ſtrato ſecundo, nec ſecant tamen vero notabilioribus, ſicut in ſtrato externo, angulis, ſed acutiſſimis rariores ſucceſſiue marginem tranſeunt fibrae, vt fere parallelae illi progredi videantur. Vbi ad baſin coni arterioſi peruenit, directionem hactenus obſeruatam mutat (*a*). Qui transuerſim enim maximam partem in inferiori ſuperficie proceſſerat, qui ſurſum oblique et ſiniſtrorſum in ſuperiori adſcendit, parallelus fere margini baſilari, adeo in hac ſede flectitur, vt transuerſim denuo nunc, et parallelus baſi arteriae pulmonalis, progrediatur (*b*). Sed flexus continuo finitur (*c*). Inſerit ſe parte maxima in ſuperiores fascias transuerſas, fibris ſerratim extremitatibus fibrarum transuerſalium fasciarum interpoſitis (*d*). Reliquae fibrae ex baſilari ſuperficie ſuper marginem tranſeuntes (*e*), in inferiorem portionem adductoris anterioris arteriae pulmonalis oblique adſcendendo ſe inſerunt. In alio exemplari recta continuare hunc musculum in transuerſales vidi, quo tum efficitur, vt vnus idemque musculus longior ad crenam vsque procedat, in eamque inſeratur. Magis etiam inſignem, diſtinctioremque eundem reperi.

Ff 3 *Fi-*

(*a*) Tab. VII. l. g.
(*b*) Tab. VII. p. o.
(*c*) Tab. VII. q.
(*d*) Tab VII. p.
(*e*) Tab. VII. g. l.

Fibrae fili cartilaginei poſterioris dextri. (*Tab. IX.* 25. 26.)

Exiguam et minoris momenti fasciolam, at conſtantem tamen, *fibrae fili cartilaginei poſterioris* efficiunt. Oriuntur, aut videntur oriri, a latere dextro fasciculi ſtriae (*a*). Proprie ab eodem, quo et marginalis musculus et fasciculus ſtriae ipſe originem petunt, principio fili cartilaginei poſterioris ſiniſtri (*b*) oriuntur, tectae hactenus ipſo hoc ſtriae fasciculo. Dum inde oblique deſcendunt, dum porro dextrorſum flectuntur, ſub fasciculo prodeunt, veniuntque in conſpectum, tanquam ſi ab eius latere dextro ortae eſſent. Itaque craſſus fasciculus ſtriae tribus ſtratis fibrarum compoſitus eſt, quorum exterius, ſiue ſublime, fasciculum proprium ſtriae ipſum (*c*), medium marginalem musculum (*d*), profundum fibras fili cartilaginei poſterioris dextri (*e*), producit. Sic ortae hae fibrae flexaeque vix non parallelae progrediuntur ſuo filo, et angulis acutiſſimis ſucceſſiue in idem inſeruntur (*f*). Totum tamen in hoc corde id filum cartilagineum dextrum poſterius paucae hae fibrae inſertione ſua fere occupant. Minorem in aliis cordibus eas portionem fili ſumere vidi. Vidi etiam copioſiores longe fibras eſſe, quae fasciam notabiliorem efficerent.

Adductor arteriae pulmonalis anterior. Propagatio musculorum baſilarium.

Dum marginalis musculus, parallelus fere filo cartilagineo poſteriori (*g*), eiusque fini contiguus (*h*), per inferiorem ſuper-

(*a*) Tab. IX. 25.
(*b*) Tab. IX. a.
(*c*) Tab. IX. a. b.
(*d*) Tab. IX. bb. bb. 27. 29. 34.
(*e*) Tab. IX. 25. 26.
(*f*) Tab. IX. 26.
(*g*) Tab. IX. bb. bb.
(*h*) Tab. IX. 28.

ſuperficiem decurrens, vbi ad baſin ſinus extremitas fili poſterioris verſus anterius filum flexa declinat, ad apicem vsque anguli prominentis ventriculi recta porro producitur (*a*); angulum hic musculus cum flexis circa baſin ſinus cartilagineis filis efficit; quemadmodum in deſcriptione marginalis monitum eſt. In eo angulo primus baſilarium musculorum, ex quo et caeteri porro originem ſuam ducunt, *Adductor arteriae pulmonalis anterior*, ſeu *maior* (*b*), ab ipſis marginalis musculi fibris ſuboritur. Veriſimile eſt, neque enim ex propoſito hactenus in eam rem inquiſiui, continuari pariter adductorem maiorem ex profundioribus marginalis musculi fibris, atque marginalis ipſe et fibrae fili cartilaginei poſterioris dextri ex fibris continuatae erant fasciculi ſtriae. Sic porro et caeteri musculi baſilares, dum alter ab altero oritur, ex fibris alii aliorum continuari videntur. Multa iam exſtant exempla in fibris cordis, imprimis in ſecundo ordine fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri, vbi fasciculi musculares, more neruorum in ramos diuiſi, iterumque anaſtomoſibus coniuncti, aut ſimile ramificationis ſyſtema, aut reticularem ſtructuram efficiunt; quemadmodum in cauitatibus ventriculorum fasciculos musculares ea ratione diſpoſitos eſſe, apertum eſt. At tamen ſingulare eſt in hoc exemplo, ex ſolo exiguo fasciculo ſtriae, tanquam ex vnico fonte, tantam cohortem musculorum ſucceſſiue prodire, qui totam regionem baſilarem ventriculi ſua diſtributione occupent. Id ergo proprium musculi cordis et diſtinctum habere videntur a caeteris omnibus corporis musculis, vt potius neruorum, quam ſolito musculorum more fasciculi eorum ſint collecti et diſpoſiti.

Ad-

(*a*) Tab. IX. 28. 29.
(*b*) Tab. IX. 29. a.

Adductor arteriae pulmonalis anterior. (*Tab. IX. 29. a. Tab. VIII. s. s. v. t. Tab. VII. a. c. g. f. h.*)

Vbi a fine ergo fili cartilaginei poſteris marginalis muſculus ſecedit (*a*), vt recta ad angulum ventriculi progrediatur, adductorem arteriae pulmonalis anteriorem, ſeu maiorem, producit (*b*). Hic fibris ſuis, vbi primum in conſpectum prodeunt, planitiem illam, ſuperius dictam, partem primam ſuperficiei baſilaris, quam marginalis muſculus cingit (*c*), occupat. Inde continuo in ſuperiorem partem ſuperficiei baſilaris, quae ventriculi ſuperficiei ſuperiori reſpondet, muſculus flexus, ambiensque baſin ſinus dextri, tranſit (*d*), et proximus margini baſilari, parallelusque et contiguus muſculo marginali ſecundum longitudinem partis baſilaris ad baſin coni arterioſi vsque progreditur (*e*). In hoc itinere, ab angulo ventriculi ad conum vsque arterioſum, comes, marginalis muſculus, relictas ſuas in baſilari ſuperficie fibras omnes, ſucceſſiue ſuper marginem baſilarem tranſeuntes, in ſuperficiem receperat ventriculi ſuperiorem (*f*), dum integer in baſilari progrediebatur adductor. Ad baſin vbi ventum eſt coni arterioſi, toto nunc iam marginali in ſuperiorem ſuperficiem ventriculi recepto, adductor pariter incipit fibris ſuis ſucceſſiue marginem tranſire baſilarem (*g*), et in ſuperiorem ventriculi ſuperficiem ſe recipere (*h*). Vt angu-

(*a*) Tab. IX. 28.
(*b*) Tab. IX. 29. a.
(*c*) Tab. IX. 29. a.
(*d*) Tab. VIII. s.
(*e*) Tab. VIII. s. s. v.
(*f*) Tab. VII. m. l. g.
(*g*) Tab. VIII. v. t.
(*h*) Tab. VII. a. c. g.

totus ergo margo baſilaris fibris, oblique eum tranſeuntibus, anguliſque ſecantibus acutiſſimis ornatus in ſtrato medio exiſtat. Adductor ſimul ac ſuperiorem ſuperficiem intrauit, in duas ſe diuidere ſolet fasciculos, quorum ſuperior (*a*) in hoc quidem corde fibris paucioribus tantum ad baſin arteriae pulmonalis adſcendit, in eamque ſe inſerit (*b*), reliquis parallelus ſub baſi arteriae tranſit, inſertus in crenam (*c*). In aliis cordibus minus, dum ſuper marginem tranſit, flexum hunc musculum, magisque oblique adſcendere, et totum eius ſuperiorem fasciculum in baſin ſe arteriae pulmonalis, in eius quidem partem anteriorem, inſerere vidi. Inferior fasciculus, qui ipſa ſub baſi arteriae pulmonalis tranſire in aliis cordibus ſolet, in hoc ad baſin coni arterioſi transuerſim progreditur, et in crenam ſe inſerit (*d*). Fibris caeterum inſignibus obliquis hi duo fasciculi inter ſe mutuo coniuncti ſunt (*e*). Dum ab angulo cordis adductor in baſilari ſuperficie prope marginem baſilarem progreditur; vt latere dextro huic margini, ita ſiniſtro crenae contiguus eſt baſilari, proinde contentus in hoc itinire ad baſin coni arterioſi vsque inter marginem et crenam baſilarem. Vidi in aliis cordibus, ex ea crena fibras, rariores licet, ſucceſſiue accedere adductori, eumque augere; vt maximam partem quidem a marginali hic musculus oriatur, aliquas tamen etiam ex crena baſilari ſibi accedentes fibras habeat.

Ad-

(*a*) Tab. VII. a. c. b.
(*b*) Tab. VII. b. d.
(*c*) Tab. VII e. f.
(*d*) Tab. VII. c g. h.
(*e*) Tab. VII. c. i.

Adductor arteriae pulmonalis dexter. (*Tab. VIII. w.*).

Vbi vl imis fibris maior adductor ſiue anterior ſuper marginem baſilarem tranſit (*a*), ex latere eius ſiniſtro, arteriam pulmonalem verſus ſpectante (*b*), *adductor arteriae pulmonalis minor*, ſiue *dexter* egreditur (*c*), videturque pariter a fibris illius profundioribus ſecedere. Vti ab angulo cordis ad hanc ſedem vsque, vbi maior adductor in ſuperficiem ventriculi ſuperiorem tranſit, marginalis primum (*d*), deinde adductor maior (*e*), marginem baſilarem occupauerant, quae eius porro ſupereſt pars minor ad baſin arteriae pulmonalis vsque, adductore minore ſeu dextro occupatur (*f*). Hic enim, paruo, ſub margine prioris muſculi retrorſum, fere aortam ververſus, egreſſus, arcu continuo facto, verſus marginem baſilarem flectitur, dexterioribusque ſuis fibris omnino in ſuperiorem ventriculi ſuperficiem ſuper illum tranſit (*g*), mediis in margine ipſo (*h*), ſiniſterioribus in ſuperficie poſteriori coni arterioſi ad baſin vsque arteriae pulmonalis adſcendit (*i*), in quam ipſam muſculus ſe inſerit. Sic totum latus dextrum baſis arteriae pulmonalis hic muſculus ſua inſertione complectitur. Mediae eius fibrae latus, ſeu angulum, baſis ipſum, dextrae partem, ei proximam in ſuperficie anteriori, ſiniſtrae in poſteriori, occupant. Solet breuis, ſatis tamen latus muſculus eſſe. Longum vero magnum et inſignem, nec multo maiori minorem, in vno hactenus corde vidi.

Con-

(*a*) Tab. VIII. v. t.
(*b*) Tab. VIII. r t.
(*c*) Tab. VIII. w.
(*d*) Tab. VIII. y. v.
( ) Tab. VIII v. t.
(*f*) Tab. VIII. t. x.
(*g*) Tab. VIII. w. Tab. VII. a b.
(*h*) Tab. VII. A. Tab. VIII. x.
(*i*) Tab. VIII. r. x.

Contractor interſtitii valuularis. (*Tab. VIII. o.*).

Dum idem muſculus adductor arteriae pulmonalis maior, in angulo ventriculi ex flexa parte marginalis (*a*), ortus (*b*) iuxta crenam ſuperficiei baſilaris progreditur; in toto hoc itinire ex latere eius ſiniſtro, crenae contiguo, *contractor interſtitii valuularis*, fibris ſuis ſucceſſiue egreditur. In ſolo hoc corde, vbi et quae crena, in ſtrato ſecundo non minus quam in externo, eſſe ſolet, latior hiatus eſt, (*c*) fibris internis apparentibus occupatus (*d*), a filo cartilagineo dextro anteriori hic muſculus oriri videtur. Neque progreſſus etiam neque inſertio in hoc corde ea eſt, quam in aliis obſeruaui. Progreditur nempe parallelus (*e*) adductori maiori et inſerit ſe in pulmonalem musculum poſteriorem huius ſtrati ſecundi (*f*). Solet autem, vbi ex crena baſilari, vel a latere adductoris maioris, ortus eſt, retrorſum oblique et ſiniſtrorſum progredi verſus aortam, eamque in ſedem inſeri, ex qua in ſtrato externo aorticus maior oritur; nimirum in angulum dextrum baſis aortae, deinde in nodulum cartilagineum dextrum, et in primam partem fili cartilaginei anterioris dextri. Inconſtantior tamen omnino hic muſculus eſſe videtur, non quidem vt prorſus deficiat, ſed vt varie in variis cordibus, imprimis inſertionis reſpectu, ſe habeat. Vti crena baſilaris, qua pars baſilaris ſe complicat, dum cor in ſtatu quietis eſt, nonniſi aliqua fibrarum inflexione in ſtrato externo cognoſcitur, ipſa muſculorum ſtructura eam in ſtrato medio efficit; cum fibrae amborum muſculorum, adductoris

(*a*) Tab. VIII. y.
(*b*) Tab. VIII. s.
(*c*) Tab. VIII. p. p. q. q.
(*d*) Tab. VIII. p p.
(*e*) Tab. VIII. o.
(*f*) Tab. VIII. h. i. k.

toris maioris et contractoris interſtitii valuularis quaſi ex hac crena emergere videantur.

Pulmonalis poſterior. (*Tab. VIII. h. i. k. z.*)

Quos hactenus dixi baſilares muſculos, hi ne vllam quidem cum iis, qui ſedem eandem in ſtrato externo occupant, muſculis ſimilitudinem habent; et ipſa directio eorum ab externorum directione, quantum poteſt, differt. Externi recta ſuper marginem baſilarem tranſeunt, (*a*) angulisque illum rectis ſecant; medii paralleli fere huic margini progrediuntur, et ab externis contra angulis rectis ſecantur. Qui nunc ſequitur pulmonalis poſterior, (*b*) externo eiusdem nominis muſculo (*c*), qui eandem fere ſedem occupat, admodum ſimilis eſt, nec niſi in eo ab hoc differt, vt baſilarem ſuperficiem non egrediatur, ſed terminetur ad adductorem maiorem; cum externus circa conum arterioſum flexus (*d*) in ſuperiorem tranſeat ventriculi ſuperficiem. Oritur ergo pulmonalis poſterior ab adductore maiori arteriae pulmonalis, pariter ex latere eius ſiniſtro (*e*), in media parte inter contractorem interſtitii valuularis et adductorem minorem, ſimili ratione ac illi muſculi ab eodem oriebantur, fibris nempe, cum fibris eius ex eadem quaſi crena exeuntibus, at continuo oblique a fibris illius ſecedentibus. Qui ipſe ergo adductor maior a marginali muſculo ſecedit, ab eo ſucceſſiue contractor interſtitii valuularis primo, deinde pulmonalis poſterior, denique adductor arteriae pulmonalis minor ſecedunt. Sic ortus muſculus, plerum-

(*a*) Tab. V. 22.

(*b*) Tab. VIII. h. i. k. z.

(*c*) Tab. V. 1. 2. 51. 6. 5. 7. 8.

(*d*) Tab V. 8.

(*e*) Tab. VIII. z.

plerumque in duas portiones, ſuperiorem (*a*) et inferiorem (*b*), diuiſus, transuerſim in ſuperficie baſilari ab adductore maiori pone conum arterioſum, et in ipſa huius ſuperficie poſteriori, ſiniſtrorſum progreditur, fibris in hoc corde quidem flabellatim diſperſis. Portio ſuperior, propior baſi arteriae pulmonalis, anguſtiorque, iuxta adductorem minorem primo, dein, dum hic verſus baſin arteriae pulmonalis flexus adſcendit, diuerſus ab eo, recta in ſuperficiem tranſit poſteriorem coni arterioſi, (*c*) eamque fere totam transuerſim percurrit. Inſerit ſe in poſteriorem parietem coni arterioſi, haud longe ab eius latere ſiniſtro, in eam lineam, quam fibrae circumflexae ſiniſtrae externae (*d*) ſua inſertione in hoc pariete efficiunt. Vidi tamen in alio corde, in quo et medias fibras circumflexas ſiniſtras ſub externis detexi, de quibus in ſequentibus dicam, in eas medias circumflexas quoque aliquas harum pulmonalium fibrarum continuare. Portio inferior, latior, baſi propior coni arterioſi, vel ad ipſam hanc baſin conſtituta, transverſim pariter iuxta priorem in poſteriori pariete coni arterioſi progreditur, eumque omnino parietem totum percurrit. Inſerit ſe in oram dexteriorem foſſae triangularis, (*e*) ad quam et fibrae pulmonales poſteriores externae alteris ſuis extremitatibus adhaerebant. Parua, quaſi tertia, in hoc corde huius muſculi portio adhuc datur (*f*), inſerta in poſtremam partem foſſae triangularis, orta autem a contractore interſtitii valuularis. At haec inter variabilia referenda, quae in vllo vix alio corpore confirmantur, et ad indiuiduum potius pertinent.

 Ad-

(*a*) Tab. VIII. h.
(*b*) Tab. VIII. i. k.
(*c*) Tab. VIII. h.
(*d*) Tab. VIII. f.
(*e*) Tab. VIII. i. k.
(*f*) Tab. VIII. k.

Adductor arteriae pulmonalis poſterior. (*Tab. VIII. g.*)

His muſculis hactenus ab adductore maiori, ſeu anteriori, propagatis, pulmonalis poſterior porro *adductorem arteriae pulmonalis poſteriorem*, ſeu *minimum* producit. Paruus hic muſculus eſt. Dum portio ſuperior pulmonalis poſterioris (*a*) transuerſim in pariete poſteriori coni arterioſi decurrit, ex latere eius ſuperiori oblique ſiniſtrorſum fibrae ſimplices verſus baſin arteriae pulmonalis adſcendunt, in eamque ſe inſerunt (*b*). Conſtantem hunc muſculum, quamuis exiguum, hactenus reperi. Poſſet tanquam portio tertia pulmonalis poſterioris conſiderari. Vti tamen diuerſa ab eo actione fungitur, deprimendo partem poſteriorem baſis arteriae pulmonalis, ad proprios, in hunc vſum deſtinatos, muſculos illum, ad adductores ſcilicet huius arteriae, referre malui.

Aorticus. (*Tab. VIII. l. m.*).

Sicuti contractor interſtitii valuularis, aliter atque in hoc corde, ortus, aut productus, ab adductore maiori arteriae pulmonalis, progreſſus inde continuo retrorſum, in latus dextrum inſeri ſolet baſis aortae, et in primam partem fili cartilaginei anterioris dextri; *aorticus* quoque ſtrati ſecundi, (*c*) aliter atque in hac icone pictus exſtat, oriri ſolet. Prodeunt enim fibrae eius ex latere ſiniſtro retrorſum adſcendentis contractoris, indeque oblique verſus aortam adſcendunt. Parallelus in hoc corde contractor interſtitii valuularis adductori maiori, transuerſim a dextris ad ſiniſtra progreditur. Non ea ergo, qua ſolet, ratione, e latere eius ſiniſtro, aorticus prodire

(*a*) Tab. VIII. h.

(*b*) Tab. VIII g.

(*c*) Tab. VIII. l. m.

dire poteſt. Prodit ergo ex poſteriori, eiusdem muſculi tamen, latere, adſcenditque oblique retrorſum ad baſin aortae. Inſeritur in dexteriorem partem lateris anterioris baſis aortae, ipſum eam ſedem, ex qua in ſtrato externo aorticus minor oriebatur. In aliis cordibus anterius anguſtiorem quoque hunc muſculum vidi, vt figuram fere triangularem, atque haud exiguam propterea cum aortico minore externo ſimilitudinem hic medius aorticus haberet.

Adductor orificii venoſi. (*Tab. VIII. n.*).

Denique vti ex latere contractoris interſtitii valuularis ſiniſtro aorticus minor in aliis cordibus, ſic *fibrae fili cartilaginei anterioris dextri*, ſiue *adductor orificii venoſi*, ex dextro eiusdem muſculi latere oriri ſolet. In hoc corde, vbi aorticus ipſe ex latere poſteriori, ſiue ſiniſtro, contractoris originem ducit, ex aortico porro adductor orificii venoſi oritur (*a*). Illa tamen, vbi ex contractore adductor oritur, ſolita et conſtantior ſtructura eſſe videtur. Hinc ortae fibrae latiores planioresque continuo retrorſum verſus filum cartilagineum anterius adſurgunt, arcubusque factis flexae ſiniſtrorſum paulisper, in filum illud oblique inſeruntur (*b*). Inſignem hae fibrae ſimilitudinem cum aortico maiori et faſcia infundibuli magna in ſtrato externo habent (*c*), tum latitudinis et ſpeciei fibrarum, tum etiam directionis ductusque et curuaturae earum et ſedis demum, quam occupant, reſpectu. Vt dubius quoque aliquando fuerim, num forte eorundem muſculorum interiores ſiue profundiores fibrae eſſent, quas detrahendo ſtratum externum in

(*a*) Tab. VIII. n.

(*b*) Tab. VIII. e.

(*c*) Tab. V. f. 16. 22.

in hac ſede reliquerim. Id tamen minime ſe ita habere, vel deſcenſus demonſtrat harum fibrarum ſub fibras aortici in hoc corde, (*a*) et ſub eas contractoris interſtitii valuularis in ſolita ſtructura, ſub quos muſculos fibrae fili cartilaginei ſe recipiunt; cum ſtrati externi aorticus maior et faſcia infundibuli magna ſuper muſculos baſilares omnes non modo, ſed etiam ſuper marginem baſilarem in ſuperficiem ventriculi ſuperiorem tranſeant. (*b*) In eo ſolo ergo adductor orificii venoſi ab aortico maiori et faſcia infundibuli differt, vt baſilarem ſuperficiem, ipſamque partem eius poſteriorem ſeu inferiorem non egrediatur, ſed ad crenam potius baſilarem terminetur.

Propagatio muſculorum baſilarium accuratius deſcripta.

Sic ſtriae faſciculus, fons omnium muſculorum baſilarium, ex fibris ſuis profundioribus fili cartilaginei poſterioris dextri fibras primum, (*c*) deinde et marginalem, (*d*) producit, qui porro ſimili ratione ſuas dat fibras profundiores ad efficiendum adductorem arteriae pulmonalis maiorem (*e*). Hic contractorem porro interſtitii valuularis (*f*), et pulmonalem poſteriorem (*g*), et adductorem tandem arteriae pulmonalis minorem (*h*), pari ratione largitur. Pulmonalis denique adductorem arteriae pulmonalis minimum (*i*), et contractor interſti-

(*a*) Tab. VIII. m.
(*b*) Tab. V. 22.
(*c*) Tab. IX. 25. 26.
(*d*) Tab. IX. bb. b. bb. 27.
(*e*) Tab. IX. 29. a. Tab. VIII. s.
(*f*) Tab. VIII. o.
(*g*) Tab. VIII. z. h. i. k.
(*h*) Tab. VIII. t. w. x.
(*i*) Tab. VIII. g.

terſtitii valuularis aorticum, (*a*) et adductorem orificii venoſi (*b*), producit. Et veriſimile mihi videtur, adductorem orificii venoſi vna cum aortico muſculo fibris ſuis ſub contractore interſtitii valuularis continuare in ſolita ſtructura ad adductorem vsque arteriae pulmonalis maiorem, ex cuius fibris profundioribus ipſi hi muſculi vna cum contractore interſtitii valuularis oriantur. Vt vnus adductor ergo arteriae pulmonalis maior, quem marginalis produxerat, omnes hos caeteros muſculos: contractorem interſtitii valuularis, adductorem orificii venoſi, aorticum, pulmonalem poſteriorem, et adductorem arteriae pulmonalis minorem producat, ſolus minimus huius arteriae adductor a pulmonali porro oriatur.

(*a*) Tab. VIII. l. m.
(*b*) Tab. VIII. n.

DISSERTATIONIS OCTAVAE, DE FIBRIS MEDIIS VENTRICVLI DEXTRI.

Pars poſterior.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. die 31 *Ian.* 1788.

Fibrae circumflexae ſiniſtrae in ſtrato medio.

Quae partem imprimis baſilarem ventriculi dextri occupant medias huius ventriculi fibras, in praecedenti diſſertationis parte deſcripſi. Sequuntur ergo, quae per inferiorem eius et ſuperiorem ſuperficiem diſtribuuntur. Ex his primae ſunt *circumflexae ſiniſtrae*, vel, quem illae efficiunt, muſculus circumflexus ſiniſter, memorabilis maxime in hoc corde, et in aliis quibusdam rarioribus, vbi manifeſto perfectiorem ſolito ſtructuram natura exhibuiſſe videtur. Sedem hae fibrae circumflexae ſiniſtrae in medio ventriculi ſtrato omnino eandem occupant, quam, quae ſimili notatae nomine, circumflexae ſiniſtrae in ſtrato tenent externo, eademque illis cum hisce conditio eſt. In diſſertatione ſexta, vbi de fibris externis earumque variis ſtructuris agebatur, notatum iam eſt, ſupremam ventriculi dextri partem, quae in arteriam pulmonalem anguſtior tranſit,

tranſit, conum ſcilicet quam dixi arterioſum, (*a*) omnino ſolutam in hoc nouo, cuius nunc icones (*b*) conſideramus, corde et ſeparatam praeter ſolitum eſſe a ventriculo ſiniſtro; quo conus non modo arterioſus ipſe, ſed fibrae quoque, quae partem eius ſiniſtram efficiunt, circumflexae ſiniſtrae, (*c*) pleniorem multo et ſpecioſiorem, magisque ſingularem et inſignem ſtructuram efficiunt. Quae recta ſcilicet in aliis cordibus a baſi arteriae pulmonalis in crenam tranſeunt, in eamque inſeruntur, eoque ipſo conum affigunt parti cordis ſubiectae, circum latus coni ſiniſtrum in hoc corde flectuntur, in poſterioremque eius ſuperficiem porro decurrunt (*d*); quo ipſo ſcilicet liber a partibus ſubiectis conus arterioſus efficitur. Sic ergo externae pariter, quae in ſtrato occurrunt externo, circumflexae fibrae ſiniſtrae, et mediae, quas in medio reperias ſtrato, ſe habent. Vtraeque ſolito in anteriori coni ſuperficie oriuntur, inſeruntur in proximam crenam, affigendo latus coni ſiniſtrum crenae et ventriculo ſiniſtro. In hoc corde ortae ex dicta ſede vtraeque circa latus ſiniſtrum coni flectuntur, tranſeuntes in poſteriorem eius ſuperficiem; quo totum omnino conum arterioſum liberum et ſeparatum a corde efficiunt. Quum primum ſic factas fibras circumflexas ſiniſtras, conumque arterioſum in hoc corde inuenirem, quumque deſcriberem in citata diſſertatione ſexta; rariſſimam hanc ſtructuram, vtpote nunquam hactenus viſam, putabam. Neque mediarum circumflexarum praeparatio ſatis feliciter mihi in hoc corde, imprimis vbi flexae poſteriorem coni ſuperficiem occupant, ſucceſſerat, vt pingere eas potuiſſem. Quapropter externas quoque mediarum loco

Hh 2 in

(*a*) Tab. IV. F. z. C. D. Tab. VII. A. g. B. E.

(*b*) Tab IV. V. VI. VII. etc.

(*c*) Tab IV. s. t v. w C.

(*d*) Tab V. x. z. 51. 52. 53.

in icone Tabulae octavae, medias fibras baſilares ventriculi dextri exhibente, relictas expoſui. (*a*) Praeter omnem ſpem ergo accidit, vt in tertio poſt hoc corde, quod magnum omnino et ſpecioſum erat, eandem prorſus ſtructuram, cono arterioſo a corde ſeparato, circumflexis fibris ſiniſtris, mediis pariter et externis, conum ambientibus, in eiusque poſteriorem ſuperficiem tranſientibus, inuenerim, niſi pulchriorem ea, quam videram in hoc corde, minime tamen forma ei ac ſpecie cedentem. Quamuis haud ſolitam ergo, tamen nec adeo raram conum ſolutum ſtructuram putauerim, vt non ſaepius etiam reperiatur. Ex hac nunc obſeruatione fibras circumflexas ſiniſtras medias deſcribam.

Ortus earum.

Vti parum mediae fibrae, imprimis in hac prope crenam regione, ab externis directione differunt, ortu quoque quodammodo et inſertione ſimiles iis eſſe ſolent. Ita ab eadem ſede, qua et externae oriebantur, a parte ſiniſtra baſis arteriae pulmonalis, pars aliqua circumflexarum ſiniſtrarum mediarum originem ducit. Solet in hac ſede, ad latus ſiniſtrum, eleuatior paululum baſis arteriae eſſe (*b*), depreſſior in media ſui parte anteriori (*c*); vt collem quaſi ſiniſterius conus producat arterioſus, cui ſua baſi exciſa arteria inſideat. Ex hoc colle et a baſi arteriae, qua illi haec innititur parte, externae circumflexae omnes (*d*) et pars, quam dico, mediarum (*e*) oriuntur. Magis illae inde, hae minus oblique deſcendunt; quo et efficitur, vt maior externarum, minor mediarum, portio

(*a*) Tab. VIII. f.
(*b*) Tab. VII. k. B.
(*c*) Tab. VII. d k.
(*d*) Tab. IV. t s. C.
(*e*) Tab. VII. k. B. c.

tio ab eo colle oriri queat. Altera, eaque maior, portio (*a*) ab adductore maiori arteriae pulmonalis originem ducit. Hic nempe ſicut in ſuperioribus dictum, in duos diuiſus faſciculos, altero, ſuperiori, in hoc quidem corde baſin arteriae pulmonalis tangendo praeterit, paucis tantum fibris in eam inſertis, altero, inferiori, in crenam inſeritur. In aliis ſuperiori toto in baſin ſe inſerit arteriae pulmonalis, inferiori tangendo hanc baſin tranſit in crenam. Vbi, quae in hoc corde, quae minus omnino frequens, ſtructura eſt, a ſuperiori adductoris faſciculo (*b*) inferior fibrarum circumflexarum portio (*c*) oritur. Si ipſam in baſin arteriae ſuperiori ſuo faſciculo adductor tranſit, quod multo frequentius fieri, et fere ſolitum eſſe, videtur, portio circumflexarum inferior ab inferiori adductoris faſciculo originem petit. Nullum in hoc corde indicium eſt limitis, quo finiri adductorem, aut incipere circumflexas dici poſſit. Idemque in pluribus reperi cordibus; vt omnino in inferiorem hanc circumflexarum portionem adductoris alter faſciculus continuet. In eo tamen, quod integras mihi medias circumflexas ſuppeditauit, corde, ſemipollicem quaſi a crena tanta fibrarum inflexio, aut interruptio, apparebat, vt ſatis manifeſtum diſcrimen inter adductorem et circumflexum ſiniſtrum medium eſſet.

Earum progreſſus.

Sic ortae a baſi partim arteriae pulmonalis, partim ab altero adductoris huius arteriae faſciculo, aut continuatae, fibrae circumflexae ſiniſtrae mediae oblique ſiniſtrorſum ad marginem coni arterioſi ſiniſtrum ſiue poſtremam crenae regionem

 deſcen-

(*a*) Tab. VII. k. e. f.
(*b*) Tab. VII. a. c. d.
(*c*) Tab. VII. e. E. f.

deſcendunt. Ea obliquitas varia in variis cordibus eſt. Id vero conſtans, vt propior transuerſali ductui mediis circumflexis progreſſus ſit, quam externis, imprimis in poſteriori coni ſuperficie. Ipſae nimirum externae fibrae in variis cordibus directione nonnihil differunt, ſicut ex comparatione Tabularum, primae et quartae, apparet. Si externae igitur propius in aliquo corde ad transuerſalem directionem ſuo progreſſu accedunt, mediae eo magis eam directionem ſequuntur; minus, ſi externae magis a transuerſo diſtant. Vt angulis ſe mutuo conſtanter, acutioribus quidem, externae mediaeque decuſſent. Minus id quidem in hoc corde ad ſuperiorem coni ſuperficiem fieri videtur, in aliis vero eo maiorem differentiam, vbique aliquam, obſeruaui. Nec rarum eſt, omnino transuerſim medias circumflexas ab exciſa parte baſis arteriae pulmonalis et ab adductore huius arteriae marginem coni ſiniſtrum verſus productas videre. Sic in eo imprimis corde apparuerunt, in quo conum arterioſum iterum a corde ſeparatum, mediarumque in eius poſteriori ſuperficie continuationem obſeruaueram. Et ſolitum potius eſſe arbitror, vel omnino transuerſim in hac ſuperiori cordis ſuperficie medias circumflexas procedere, vel parum tamen ab eo ductu declinare.

Et inſertio.

Vbi ad maginem coni ſiniſtrum vsque peruenere, ſi conus hoc ſiniſtro ſuo latere cordi aduatus eſt, quod ſolita ſcilicet ſtructura eſſe videtur, fibrae in crenae regionem, cui ipſi margo coni ſiniſter incumbit, ſe inſerunt, eoque et crenae ſupremam partem, quae, ſi conus ſolutus eſt, ad eius baſin terminatur, vna cum externis efficiunt, et conum cordi alligant; ſtructuramque ipſam illam cordis ſolitam hac inſertione producunt. Si conus vero ſolutus reperitur. circum latus eius ſiniſtrum fibrae flexae in poſteriorem eius ſuperficiem tranſeunt.

In

In ea nunc progreſſum earum et inſertionem in ſolo eo hactenus, cuius mentionem feci, corde obſeruaui. Externae circumflexae ſiniſtrae ſimillimae in eo corde iis ſunt, quas cordis praeſentis Tabula quinta (*a*) repraeſentat. Flexae fibrae in poſteriorem hanc coni ſuperficiem fere recta in baſin eius (*b*) a ſuperioribus lateris coni ſiniſtri ſedibus (*c*) deſcendunt. Minimum eſt, quod dextrorſum oblique in poſteriori hac ſuperficie vergunt. Et aliae quaedam pariter his flexis additae ſunt quoque in illo corde, ſicut in hoc (*d*), quae in poſteriori ſuperficie a baſi arteriae pulmonalis ortae cum prioribus flexis deſcendunt, et in lineam illam obliquam, (*e*) lateri ſiniſtro coni parallelam, baſique continuam ductam, inſeruntur. His fibris ergo externis, in illo corde accurate remotis, totam hanc ſedem, imo et aliquanto maiorem, fibris iterum, ſed omnino transuerſis, baſique arteriae pulmonalis parallelis, repletam reperi. Vt nullum dubium eſſet, quin diuerſae iſtae ab externis, et, continuatae cum eſſent ab illis, quas ortas in anteriori coni ſuperficie a baſi partim arteriae pulmonalis, partim continuatas ab adductore huius arteriae, in ſuperioribus dixi, verae circumflexae ſiniſtrae ſint fibrae in ſtrato medio. Transuerſim ergo, et parallelae baſi arteriae pulmonalis, hae fibrae circumflexae ſiniſtrae medii ſtrati a latere coni ſiniſtro in poſteriori eius ſuperficie dextrorſum progrediuntur, vltraque lineam illam obliquam, (*f*) ſedem inſertionis circumflexarum externarum, paulisper procurrendo, in medium quaſi parietem demum poſteriorem coni arterioſi ſe inſerunt. Vt externae ergo

---

(*a*) Tab. V. x. z. 1. 51.
(*b*) Tab V. z. 51 52. 53.
(*c*) Tab. V 54 z.
(*d*) Tab. V. x. y.
(*e*) Tab. V. 1. 53.
(*f*) Tab. V. 1. 53. 52. 51.

ergo non parieti coni, ſed oriundis ab eadem linea obliqua pulmonalibus poſterioribus fibris externis (*a*), inhaereant. In eo, quod dixi, corde ſingularis quidem faſciculus ex circumflexis his, qui ipſam coni arterioſi baſin cingebat, ex transuerſali ductu oblique ſurſum flexus, in baſin ſe inſerit arteriae pulmonalis; reliquae ſuperiores fibrae, transuerſales continuo ad illum adſcendentem faſciculum ſe applicabant. Haud tamen, ſolitam eam ſtructuram eſſe, probabile eſt. Id in vniverſum affirmari poſſe videtur, circumflexas medias, niſi tranſierint obliquam lineam inſertionis externarum, ad eam vsque transuerſim in coni poſteriori ſuperficie procedere, in eandemque, aut in regionem eandem ſe inſerere. Prolixior paululum in deſcribendis circumflexis ſiniſtris, mediis aeque et externis, fui, quod memorabiles hae fibrae ob conum, quem efficiunt, arterioſum, ſingularem, propriisque parietibus ſuis a reliquo corde omnino diſtinctam, ventriculi dextri partem, viſae ſunt mihi. Progredior nunc ad faſcias ſequentes.

Faſcia angularis ſecunda. (*Tab. IX.* 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. *Tab. VII. n. v. w.*).

Earum proxima eſt *angularis ſecunda*, ſeu *inſinuata prima.* Marginalis ipſa iam angulum cinxerat, partem eius poſtremam, ventriculi dextri; haec mediam eius partem circumdat; tertia, quam dicam, anteriorem, ventrali propinquam, tegit. Coniunctim hae tres faſciae, ſicut angularis in ſtrato externo, angulum ventriculi dextri includunt inuoluuntque, quapropter angularium nomine inſignitae ſunt. Oritur haec media, ſiue ſecunda, faſcia angularis a poſtrema, quae proxime poſt faſciculum ſtriae (*b*) ſequitur, ſtriae parte (*c*), fibris ex

(*a*) Tab. V. 1. 53. 52. 51.
(*b*) Tab. IX. a. c. b.
(*c*) Tab. IX. 30. 32.

ex profundiori parte ſepti emergentibus. In alio tamen corde longe aliter, a toto filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro hanc faſciam late oriri vidi; vt magna, eaque latiſſima, ſui parte muſculum omnino referret, aut fibras, ventriculi ſiniſtri, in anguſtiorem dextri ventriculi angularem faſciam mediam recta ſuper ſtriae regionem continuatas. Additae hae fibrae, vbi oriebantur, faſciculo ſtriae, vbi continuabant, marginali muſculo, erant ea ratione, vt magnam latamque faſciam vna efficerent, ſpeciemque maioris quaſi faſciculi ſtriae prae ſe ferrent, qua parte ex ſiniſtro ventriculo deducebantur. Siue ortae vero ex ſtriae regione, ſiue productae ex fibris ventriculi ſiniſtri, oblique verſus angulum ventriculi et verſus faſciam marginalem angulares mediae adſcendunt, partimque ad marginalem ſe applicant (*a*), partim parallelae marginali ad angulum vsque continuant (*b*), circa quem flectuntur. Frequentius etiam totam faſciam contiguam marginali, vix vlla in eum fibra inſerta, ad angulum peruenire vidi. Flexae in ſuperiorem tranſeunt ſuperficiem cordis (*c*), continuatoque ductu eodem oblique adſcendente, ſucceſſiue ſe in fibras marginalis inſinuare quaſi videntur (*d*); vnde nomen iis inſinuatarum, cum, niſi prorſus conſtans, frequentiſſima tamen et ſolita haec ſtructura ſit, addidi. Inſignem etiam magis in aliis cordibus hanc primae pariter ac ſecundae faſciae inſinuatae, ſeu tertiae angularis, inſinuationem vidi; vt et manifeſtius ſe inſinuatae fibrae ſub marginales reciperent, et copioſiores in anguſtius ſpatium coactae.

Faſcia

(*a*) Tab. IX. 31.
(*b*) Tab. IX. 33. 34. 35. 36.
(*c*) Tab. VII. n. v.
(*d*) Tab. VII. w.

Faſcia angularis tertia. (*Tab. IX.* 36. 37. 38. 39. *Tab. VII. v. x. x.*)

Ex proxima ſtriae parte ſequente, fibris, quaſi ex profundiore ſepto emergentibus, *angularis faſcia tertia*, ſeu *inſinuata* ſecunda oritur. (*a*) Etiam haec in eo corde, vbi angularem ſecundam ex ventriculo continuatam ſiniſtro obſeruaveram, ab huius ventriculi fibris originem petiit. Diuerſa tamen, et minus inſigni ratione hoc factum. Haud longe a ſtria in parte ſiniſtra ab aliqui ſiniſtri ventriculi fibra, a vicinis paulisper remota, oblique verſus apicem et ſtriam deſcendente, fibrae huius faſciae, velut pennatim illi applicatae, ortum ducebant, ſuperque propinquam ſtriam transuerſim fere in dextrum ventriculum continuabant. Vera nimirum in illo corde, in ſtrato eius externo, nulla ſtria fuit. Striae tamen veſtigium aliquod, quo eius regio indicaretur, omnino obſeruabatur. Structura crenae ſimilis, qua incumbentes ſuis extremitatibus fibris ventriculi ſiniſtri, iisdemque innatae, dextri ventriculi fibrae originem ab illis ducebant. Atque in iis quidem ſedibus, vbi angulares medii ſtrati oriri dixi, externae quoque fibrae ſimili omnino ratione ex ſiniſtro ventriculo deriuatae erant. Solita tamen ea ſtructura eſſe videtur, quae in hoc corde obſeruatur. Ortae ergo ex ſtria fibrae huius faſciae angularis, contiguae faſciae praecedenti, ductuque eodem oblique adſcendente, verſus angulum ventriculi in hac inferiori cordis ſuperficie progrediuntur. Haud raro tamen interrupta quoque haec faſcia in medio ſuo itinere, aut angulo paulo propius, inuenitur; quo fibrae ſcilicet eius, a ſtria ſubortae, ſub praecedentem angularem ſe recipiunt, et aliae contra, novae quaſi, ſub illis prodeunt, reliquam faſciae partem referentes. Nullum dubium caeterum eſt, quin, quae ſub alias ſe recipi-

(*a*) Tab. IX. 37.

recipiunt, fibrae in ſtrato medio, vel quae emergunt ſub aliis, in vniuerſum vel in ſtratum tranſeant ventriculi internum, vel prodeant ex ſtrati eius fibris, quemadmodum ex ſequentium faſciarum ſtructura manifeſto patebit. Vbi ad angulum fibrae venerunt, flectuntur, in ſuperioremque ventriculi ſuperficiem tranſeunt. In ea ita oblique adſcendunt, vt parum a longitudinalibus, recta adſcendentibus, differant. (*a*) Vti marginales ergo, parallelae margini baſilari, mediam partem inter longitudinalem et transverſalem directionem tenebant; ſecunda angularis faſcia, ſub illam ſe recipiens, propior longitudinali ductui progrediebatur. Haec tertia, magis etiam ad longitudinalem accedens, ſub ſecundam porro angularem faſciam ſe recipit, (*b*) fibris ſe miſcendo ventriculi internis. Vt, quo magis ab angulo et margine baſilari ad ventralem accedas regionem, eo et propiores fibrae longitudinali ductui progrediantur.

Ventralis prima (Tab. IX. 39. 40. 41. 42. 43. Tab. VII. x. y. z. 1.)

Quae proxima poſt hanc ſequitur fascia, ex ſtriae parte ſequente orta, (*c*) *ventralis prima* eſt, quae partem ſcilicet ventriculi ventralem in inferiori aeque ac ſuperiori ſuperficie et in margine nunc iam occupat. Ea in hoc corde duabus fibris albis tenacibus, quas tendineas omnino dixeris, incluſa eſt, altera poſteriori (*d*), qua a praecedenti angulari faſcia diſtinguitur, altera anteriore ſeu propiore apici (*e*), qua a ſequente

(*a*) Tab. VII. v. x.
(*b*) Tab. VII. x.
(*c*) Tab. IX. 41.
(*d*) Tab. IX. 40.
(*e*) Tab. IX. 42.

quente ventrali ſecunda ſeparatur. Non conſtans eſt, vt fibrae iſtae tendineae inter ipſas has faſcias reperiantur; frequenter tamen, niſi inter eas, inter alias reperiri ſolent. Natura tendinea eo minus negari iis poteſt, cum carneae fibrae pennatim ab iis oriantur, vel inſerantur in eas. In hoc corde quidem a poſteriori tendineo filo ortae transuerſim fibrae marginem verſus progrediendo in anterius inſeruntur (*a*). Aliaeque, (*b*) parallelae filis, ad marginem vsque perueniunt, tranſeuntque in ſuperiorem ventriculi ſuperficiem. Vti in vniuerſum tamen mediae fibrae in hac inferiori ſuperficie haud parum variare ſolent, totam hanc ventralem faſciam quoque ſimplicibus fibris carneis a ſtria oriri et oblique verſus marginem, parallelamque angularibus faſciis, adſcendere vidi. In alio corde magis etiam a ductu transuerſo remotae, adſcendendo oblique in tertiam angularem maximam partem inſerebantur, aliqua earum portione in ſuperiorem ſuperficiem continuata. Vbi flexa ventralis faſcia circa marginem ventriculi ſuperficiem ſuperiorem nacta eſt, (*c*) ductu eodem cum faſcia angulari tertia, parum a longitudinali declinante, anguſta faſciola adſcendit, vt marginem verſus baſilarem tendere videatur. Mox tamen curvata, parallela huic margini et faſciae marginali, progreditur, fibris vbique inter ſe parallelis. Denique receptis omnino ſub faſciam marginalem, quae eam inter et primam ventralem interceſſerant hactenus, faſciis angularibus, ſecunda et tertia, (*d*) cum marginali fere contingit, (*e*) vnaque cum ea vel tranſit, vel inſerit ſe, in transuerſas faſcias poſteriores. (*f*) Nimirum fre-

---

(*a* Tab. IX. 41. 42.
(*b*) Tab. IX. 39. 43.
(*c*) Tab. IX. 39. 43. Tab. VII. x. z.
(*d*) Tab. VII. n. v. w. v. x. x.
(*e*) Tab. VII. y.
(*f*) Tab. VII. ι. y. s.

frequens eſt reperire in hoc infra conum arterioſum ſede fibras, velut in hoc corde (*a*), ſingulari modo interruptas; vt ſerratim quaſi alterae portiones alterarum extremitatibus ſint interpoſitae, alteraeque ab alteris eo ipſo plane diſtinctae. Vtraeque tamen, ſi fabrica haec locum habet, minime ſiniri ſic, ſed demergere ſe potius in ſtratum internum videntur et in reticularem ſtructuram ventriculi. In aliis tamen cordibus plane continuare quoque fibras marginales et primae ventralis fasciae fibras vidi in transuerſas poſteriores.

Ventralis ſecunda. (*Tab. IX.* 42. 44. 45. 46. 47. *Tab. VII.* z. 2. 3. 4.)

Orta a proxima parte ſtriae *fascia ventralis ſecunda* ſuis pariter in hoc corde, vt prior, tendineis filis incluſa eſt, altero, quod et priorem terminat, poſteriori (*b*), anteriori altero (*c*), quo a ventrali tertia diſtinguitur. Singularis in hoc corde huius fasciae ſtructura eſt. Duabus conſtans plane diverſis portionibus duas fere fascias efficit, quarum prior dictam, quae media eſt, ſtriae partem totam ſuo ortu occupat (*d*); fibris transuerſis recta marginem verſus progredientibus. Poſterior tota a filo altero (*e*) tendineo fibris egregie pennatis oritur, oblique quidem his fibris ſuis deſcendendo (*f*). Sic pars earum fibrarum cum fibris fasciae prioris concurrit (*g*), pars ſe in anterius filum inſerit (*h*), et alia denique ad mar-

 ginem

(*a*) Tab. VII. p. y. 1.
(*b*) Tab. IX. 42.
(*c*) Tab. IX. 46. 47.
(*d*) Tab. IX. 44.
(*e*) Tab. IX. 42.
(*f*) Tab. IX. 45.
(*g*) Tab. IX. 44.
(*h*) Tab. IX. 47.

ginem vsque excurrit (*a*), quae ſola in ſuperiorem tranſit ſuperficiem. Quae vtriusque faſciolae fibrae inter ſe concurrunt, in internum ſtratum fibrarum et reticularem ventriculi ſtructuram ſe in hac ſede concurſus immergere videntur. Verum haec non ſolita ſtructura eſt; quin vnam ſimplicem fasciam in hac ſede a ſtria oriri, notabili ductu obliquo, et fibris ſibi mutuo contiguis, ſaepius ad marginem adſcendere, totamque in ſuperiorem ſuperficiem tranſire vidi. Id fere pro ſolito haberi poteſt, variis in ſedibus, huius pariter atque ſequentium fasciarum, fibras alias ſub alias ſe recipere, in interioraque ventriculi ſe demergere. Vbi in ſuperiorem ſuperficiem fascia tranſiit (*b*), ductu, ventralibus ſolito, a longitudinali vix diuerſo, recta fere in hac ventrali regione adſcendit (*c*). Paulatim tamen curuata in media ſuperficiei ſuperioris parte (*d*) transuerſim ductum flectendo ſub fibras transuerſales poſteriores ſe recipit. Haec ſatis conſtans ſtructura eſt; neque in vllo corde hactenus aut non recta fere per partem ventralem adſcendere has fascias ventrales, aut non curuatas, vbi ad arterioſam ventriculi et infundibuliformem partem peruenerint, ad transuerſum ſenſim inclinare ductum, aut non recipere ſe in ſedibus iis alias ſub alias, aut non tranſire, inferiue, in transuerſas fascias poſteriores, vidi.

Ventralis tertia (*Tab. IX.* 47. 48. 49.
Tab. VII. 2. 12. 9.)

Vltima ex ventralibus, *fascia ventralis tertia*, ſiue *perforata*, tenuiori principio iuxta priorem ſolitis firmioribus duriori-

(*a*) Tab. IX 43. 47.
(*b*) Tab. VII. 7. 2.
(*c*) Tab. VII. 7. 3.
(*d*) Tab. VII. 4.

rioribusque fibris, quaſi ex ſepti partibus profundioribus emergit (*a*), diſcedentibus ſenſim a ſe mutuo fibris latiorem continuo faſciam efficiendo (*b*). Poſterius, quo prior terminabatur ventralis faſcia, filamento clauditur tendineo (*c*); anterius fibris propriis, inſignibus, longioribus (*d*). Haec, dum fibrae a ſe mutuo diſcedunt, nec aliis, quae inde interſtitia enaſcuntur, fibris ſupplentur accedentibus, primos hiatus in inferiori ventriculi ſuperficie producit, eo quidem maiores inſigniorésque, quo magis continuato progreſſu fibrae a ſe mutuo ſecedunt. Sic foramina primum variae figurae minora prope ſtriam (*e*), marginem verſus ſenſim maiora (*f*) efficiuntur. In margine ipſo et in ſuperiori prope marginem ſuperficie, ipſaque in media parte ventrali (*g*) magni hiatus apparent, in quibus interna ventriculi retiformis ſtructura conſpicitur. Haec admodum conſtans fabrica eſſe videtur. Siquidem nullum hactenus cor reperi, in quo non in media ventrali hac parte, ſenſim, qua dixi ratione, medias fibras deficere, hiatusque in margine et in ſuperiori ad marginem ſuperficie formare viderim. Solent in ramos plani anguſtioresque faſciae huius faſciculi (*h*), duabus tribusue fibris facti (*i*), diſcedere (*k*), vel ſeriem edere ramorum, dum progrediuntur (*l*), eaque ratione fora-

(*a*) Tab. IX. 48.
(*b*) Tab. IX. 46. 57. 47. 49.
(*c*) Tab. IX. 46.
(*d*) Tab. IX. 57.
(*e*) Tab. IX. 50.
(*f*) Tab. IX. 56. 59.
(*g*) Tab. VII. 10. 11. 12.
(*h*) Tab. IX. 50. 51 57.
(*i*) Tab. IX. 51. 54. 55.
(*k*) Tab. IX. 56. 54. 55. 49.
(*l*) Tab. IX. 51. 52.

foramina oblonga (*a*) efficere, ipſis ramis incluſa. Rami ſub faſcias vicinas (*b*), vel ſub ſe mutuo (*c*) ſe recipiunt, inque interiorem continuant textum fibrarum, vel ſimpliciter, vbi ad aliquem hiatum peruenerunt, in cauitatem ventriculi ſe demergunt (*d*), vel foramen quaerunt ouale (*e*), in quod deſcendunt. Neque vsquam aut clarius aut facilius intricata fibrarum complicatio, aut frequentior, apparet, quam in his ſedibus (*f*), vbi ex medio ſtrato in internum ſe fibrae recipiunt. Sic ad marginem faſcia peruenit ventriculi, in anguſtos faſciculos, vel in ſimplices fibras reſoluta (*g*), diſtinctas apertis hiatibus. Hae fibrae ſeparatae et ſolitariae in ſuperiorem tranſeunt ſuperficiem (*h*), magnumque in ea prope marginem hiatum efficiunt (*i*), quem, cum conſtans ſit, cum vnus caeteros magnitudine ſuperat, a ſede, quam occupat, *ventralem* in ſtrato medio vocare poſſis. Nimirum et circa apicem fibrae mediae ventriculi dextri deficiunt, nec ſane minorem in ea regione partem vacuam relinquunt. Verum iſte defectus potius eſt quam hiatus, cum apicem verſus fibrae omnino defierint, quae poſt factum hiatum ventralem crenam verſus denuo oriuntur, totamque ab hiatu ad crenam vsque ſuperioris ſuperficiei ventriculi partem replent. Hiatus ſingulari modo formatur. Quae quaſi ſuperſtites ventralis faſciae fibrae (*k*), caeteris iam in inferiori ſuperficie

(*a*) Tab. IX. 56. 59.
(*b*) Tab IX. 50. 52.
(*c*) Tab. IX. 61. 62.
(*d*) Tab. IX. 57.
(*e*) Tab. IX. 64.
(*f*) Tab. IX. 50 58. 61. 64. 69.
(*g*) Tab. IX. 53. 54. 55. 49.
(*h*) Tab. VII. 2. 5. 5 12.
(*i*) Tab. VII. 6. 7 8 10. 11 19.
(*k*) Tab. IX. 53. 54. 55. 49.

ficie conſumtis (*a*), paucae, ſolitariae, amplisque interſtitiis diſtinctae, in ſuperiorem ſuperficiem veniunt (*b*), nec ipſae in caeteras medii ſtrati fibras, reliquam ſuperficiei partem ad crenam vsque tegentes, continuant, ſed omnino in ſtratum internum, interioremque ventriculi ſtructuram deſcendunt. In tota enim hac media ventrali regione (*c*), ambitu haud exiguo, reticularis partim fabrica (*d*), partim et columnae (*e*) manifeſto apparent. In eas columnas, in earumque fabricam reticularem, fibrae illae ſolitariae continuant (*f*). Quae caeteram partem ſuperficiei ſuperioris ab hiatu vsque ad crenam nouae fibrae occupant, propriis ſuis radicibus ex interna pariter emergunt ſtructura (*g*), fibras, inferius dicendas, transuerſas anteriores efficiendo. Sic aliae ex medio ſtrato in ſtratum internum, et in cauitatem ventriculi, deſcendunt fibrae, aliae ex interiore hoc textu enatae in medium ſtratum adſcendunt, fasciasque inſignes in eo efficiunt. Frequentius hoc et exemplis magis inſignibus in ſiniſtro ventriculo obſeruatur, vbi etiam ex remotioribus ſtratis fasciculi paſſim fibrarum inueniuntur ſtratum proximum, ſibi ſubiectum, perforare, et in cauitatem vsque ventriculi, in eiusque retiformam ſtructuram, penetrare. Huiusmodi tamen exemplum ſatis manifeſtum in dextro ventriculo nondum reperi, quin, quae fibrae aut fasciae ſe ſub alias in ſtrato externo recipiunt, ſub eas continuare fascias, tandemque cum iisdem ſe coniungere, adeoque in ſtrato externo permanere

(*a*) Tab. IX. 52 58. 50. etc.
(*b*) Tab. VII. 2 5 5. 12.
(*c* Tab. VII 6. 10. 11 19.
(*d*) Tab. VII. 8 11.
(*e*) Tab VII. 6. 10.
(*f* Tab. VII. 5. 6. 5. 8.
(*g*) Tab. VII. 9 13. 20. 21.

nere potius videntur. Hic finis ergo eſt faſciae ventralis tertiae.

Fibrae ſolitariae ventrales. (*Tab. VII.* 12. 12. 22. 23. 24. 25.) *Defectus ſtrati medii.*

His faſciis, a ſtria ſubortis, ſuper inferiorem tranſeuntibus ſuperficiem et per ſuperiorem diſtributis, fibrae quaedam accedere etiam ſolent ſolitariae (*a*), quae vltimae ſcilicet ſuperiorem ſuperficiem attingunt, nec raro ad crenam vsque perveniunt (*b*). Hae pariter in ventrali regione circa marginem flectuntur, in eademque porro decurrunt. Quae poſtea a ſtria oriuntur fibrae, earum nulla, quantum ego quidem perſequi eas potui, ad ſuperiorem vsque ſuperficiem peruenit; cum ſingulae vel in ipſa iam ſuperficie, vel in margine tamen, in interiorem ventriculi ſtructuram ſe demergant. Sic tota apicis regio in ſuperiori ſuperficie medio ſtrato caret, ſoloque externo tegitur (*c*). Nimirum haec ipſa ventriculi pars maxime intus carneis columnis, trabibusque et fibris repleta eſt, tum inter ſe cohaerentibus variis modis, tum etiam parietes ipſos connectentibus ventriculi. Ab hac apicis regione ſecundum marginem anteriorem ſtructura reticulata intus ad angulum vsque ventriculi protrahitur, tota arterioſa contra et infundibuliformis pars ad baſin arteriae pulmonalis vsque caua omnino et vacua fibris intus eſt. Probabile ergo, magnam huius ſtructurae reticularis, cauitatem ventriculi replentis, partem a fibris oriri mediis, quae ex ſtrato ſuo in cauitatem ſe demergant, eamque ſtructuram efficiant. Quae circa apicem enim copioſiſſimae omnium reperitur et denſiſſima textura, fibris regionis apicis, quae omnes, nulla

(*a*) Tab. VII. 12. 12. 22.
(*b*) Tab. VII. 25.
(*c*) Tab. VII. 22. 23. D.

nulla excepta, in cauitatem deſcendunt; quae inde verſus angulum producitur, marginemque imprimis et partem ventralem occupat, ventralibus fibris, quarum magna pars pariter introrſum ſe vertit, deberi videtur. Neque ſatis enim inquiſita haec res hactenus mihi eſt. Vti in tota apicis regione, ſic prope mediam crenae partem pariter mediae fibrae deficere ſolent. Minor in hoc corde hiatus tantum apparuit (*a*). In aliis maiore ambitu ſedes obſeruata, mediis fibris vacua. Conſtans eſt, vt, quo magis ad crenam accedas, eo difficilius ſit medias fibras continuare et ſeparare ab externis; vt cum his prorſus coaleſcere et vnum quaſi ſtratum in hac ſede efficere videantur. Solitariae caeterum fibrae, ab vltimis faſciae ventralis tertiae partim, partim a primis regionis apicis fibris, ortae in hoc corde, vbi circa marginem flexae ſuperiorem ſuperficiem intravere, ſolito ventralibus ductu adſcendunt primo, deinde curuatae oblique verſus crenam progrediuntur (*b*), cui ſe inſerunt.

Fibrae regionis apicis. (Tab. IX. 60. 49. f. 74.)

Quae reliquam tandem ſtriae partem ortu ſuo occupant fibrae totam ſuo decurſu apicis regionem, ſeu partem ventriculi, fibris intus repletam, in inferiori ſuperficie tegunt, *fibrae regionis apicis* eam ob cauſam dictae. Hae pluribus longis anguſtisque faſciolis, vel fibris, vario modo inter ſe iunctis, at adeo variabilibus, conſtare ſolent, vt nihil certi in iis, niſi quod ad omnes in vniuerſum ſpectat, diſtingui et conſtitui poſſit. Quae apicem ipſum, in hoc corde eminentem ſeparatumque a ventriculo ſiniſtro tenent (*c*), ſatis quidem a praecedentibus perforatis ſe diſtinguunt. Sed vti raro accidit, vt diſtincto ſic apice

(*a*) Tab VII. 16 17.
(*b*) Tab VII. 23 25.
(*c*) Tab. IX. 72. 74.

ce ventriculus promineat; raro hae fibrae quoque inſigni aliqua nota a prioribus diſtinguuntur. Ortae ergo a ſtria ſeparatae anguſtaeque faſciolae (*a*) transuerſim in hoc corde marginem verſus progrediuntur, aliaeque ex iis longiores breuibus paſſim transuerſis laminis quaſi carneis (*b*) coniunguntur, clauſosque hiatus, ſiue foramina ſubrotunda efficiunt (*c*), fabricamque ſic producunt retiformi haud plane abſimilem. Aliae breuiores (*d*), inter illas contentae hactenus, vbi ad foramina perueniunt, demergunt ſeſe, internisque fibris ventriculi accedunt (*e*), vel recipiunt ſe ſub illas ſolito modo (*f*). Longiores ad marginem vsque progrediuntur, ibique ſe, quantum indagare potui, in interiorem ſtructuram inſinuant. In aliis cordibus paulo aliter ſe fibras regionis apicis habere reperi. Ductu plerumque inſigniter obliquo marginem et baſin verſus adſcendunt. Longas, nec tenues, fibras, a ſe mutuo diſtantes interſtitiis oblongis, paſſimque transuerſis breuibus latisque fibris connexas, ab ipſo fine etiam ſtriae, parallelas fere margini adſcendere vidi. In alio corde reticularem curuatae fibrae, qualis in internis ventriculorum ſuperficiebus frequens eſt, fabricam efficiebant, maioribus minoribusque hiatibus, ſiue foraminibus oualibus, copioſis, inſignem. Neque negauerim, vbi eiusmodi ſtructura inuenitur, alias, praeter eas retiformes, internas fibras, quae parietem ſcilicet obducant internum, non dari, ſiue internas illas, mediis deficientibus in hac ſede, velut in ventrali hiatu, ſiue medias vocare malueris, nullis parietalibus intus obductas. Aliud enim ſtratum internum eſt, cuius fibrae parieti ven-

(*a*) Tab. IX. 60. 63. 65. 68.
(*b*) Tab. IX. 69 64.
(*c*) Tab. IX 70. 64.
(*d*) Tab. IX. 61. 64. 68.
(*e*) Tab IX 64. 68.
(*f*) Tab. IX. 61.

ventriculi adhaerent, eundemque efficiunt, alia reticularis, quae cauitatem replet, ſtructura, cuius columnae fibraeque radicibus ſuis parieti adnatae, caeterum ſolutae, inter ſe ipſas connexae, parietum quoque oppoſitas ſedes connectunt, cauitatemque occupant. Vti paries ergo ipſe, ſeparatus a columnis, tenuiſſimus ad apicem et in ventrali regione, multo ad baſin craſſior, eſt; mediae omnino in internas in ſedibus hisce, imprimis vbi cor tenuius, fibrisque pauperius eſt, abire videntur; vt aut mediae in his ſedibus, ab internis diſtinctae, aut internae parietales non dentur.

Fibrae transuerſae ſuperiores. (*Tab. VII. q. r. s. t.*)

Hae fibrae ſunt, quae a ſtria ipſa, communi omnium mediarum origine, oriuntur. Vti baſilares vero faſciculi a faſcia marginali, ſecedentibus ab ea fibris, neruorum fere more, propagantur; vti circumflexae porro ex faſciculis adductoris arteriae pulmonalis continuantur potius, interrupta tantum fibrarum continuitate ab illis faſciculis diſtinctae; quas *transuerſas* dixi *ſuperiores* vel *poſteriores*, *faſciae* (*a*) ſimiliter quodammodo ab angularibus faſciis, praeſertim marginali, et a prima ventrali, quae *inferiores* vel *anteriores* audiunt (*b*), a tertia ventrali producuntur. Vt ipſae quidem, haud magis quam dictae baſilares, circumflexaeque ſiniſtrae, a ſtria, ſed a faſciis tamen, a ſtria ſubortis, vt illae, originem ducant. Nimirum ſingularis in hac ſub cono arterioſo ſede, vbi ſuperiores transuerſae oriuntur, fibrarum intricatio conſtanter obſeruari ſolet, varia tamen in variis cordibus; vt oriantur quidem conſtanter transuerſae in ea ſide, ſed variis modis. Seratim in hoc corde fines fibrarum marginalis et primae ventralis faſciae principiis

Kk 3 inter-

(*a*) Tab. VII. q. r. s. t.
(*b*) Tab. VII. 13. 20. 21.

interponuntur transuerſarum ſuperiorum (*a*). In alio oblique angularium fibrarum ſingularum extremitates ſub ſingulas fibras oriundarum transuerſalium ſe recipere vidi, vt inordinata fibrarum vnius fasciae intricatio eſſe videretur. Prodire omnino ſub angularibus transuerſae in alio obſeruatae ſunt corde; et continuari fere ex tribus angularibus in alio; niſi vt leui aliqua interruptione vtrarumque fasciarum fibrae diſtinctae a ſe mutuo eſſent. Quocumque modo vero ab angularibus primisque ventralibus ortae fibrae transuerſae ſuperiores, omnino directionem, qua illae ferebantur fasciae, a quibus oriuntur, mutant. Transuerſim plane, niſi potius deſcendendo oblique, verſus crenam progrediuntur, parallelae baſi arteriae pulmonalis (*b*); cum angulares et ventrales recta verſus baſin illam adſcenderent, margini baſilari parallelae (*c*). Hoc ductu et progreſſu partem maxime occupant ventriculi arterioſam (*d*). Quae ad harum ortum vsque adſcenderant oblique, angulares et ventrales fasciae venoſam potius partem replent (*e*). Inſeruntur demum, quo ſuperius dixi modo, adhaereſcendo magis magisque fibris externis, in crenam (*f*). Solent plerumque in plures minores fasciolas diſtinctae eſſe, quae tamen nec numero conſtantes ſunt, nec figura, nec ſede. Quatuor admodum diſtinctae in hoc corde numerantur: duae dexteriores, ſuperior altera (*g*), a marginali ſuperius dicto modo producta, altera inferior (*h*), ex finibus ſuborta fasciae ventralis primae, duae

(*a*) Tab. VII. p. y. 1.
(*b*) Tab. VII. q. r. s. t.
(*c*) Tab. VII. c. g. z. 1 2. 4.
(*d*) Tab. VII. A. B. l. 25.
(*e*) Tab. VII. l. 25. C. 12. D.
(*f*) Tab. VII. r. t.
(*g*) Tab. VII. q.
(*h*) Tab. VII. s.

duae ſiniſteriores, quarum ſuperior (*a*) a dextra ſuperiori, inferior (*b*) ab inferiori, fibrarum continuatione inſigniter interrupta, producitur. Vt geminas faſciolas duas in hoc corde transuerſae fibrae ſuperiores collectae efficiant. Frequentius tamen ſimplices faſciolas, continuo, poſtquam ab angularibus ſuis et ventralibus faſciis ortae ſunt, ductu ad crenam vsque productas reperi, duas, tresue vel quatuor, a cono arterioſo antrorſum ſucceſſiue arterioſam venticuli partem occupantes.

Transuerſae inferiores (*Tab. VII.* 13. 20. 21.)

Vti ex finibus angularium et ventralium, primae (*c*) et ſecundae (*d*), imo et tertiae, quae fibris nonnullis prioribus accedit (*e*), ſuperiores transuerſae producuntur; inferiores a latere faſciae ventralis tertiae, vel potius ab hiatus, quem ea in ſuperiori ſuperficie ventriculi efficit, latere originem ducunt. Nimirum continuantur omnino ex fibris ventriculi internis, et emergunt in hac ſede ventriculi, vbi, ſimulac ſuperiorem nactae ſunt ſuperficiem, ſiniſtrorſum flectuntur, oram quaſi ſiniſtram hiatus efficiendo. Nonnullis etiam in ſedibus ex ipſis columnis, quae in hiatu apparent, continuantur. Vt ergo, quemadmodum aliae ex medio ſtrato fibrae deſcendunt in fibras internas, et in ſtructuram ventriculi reticularem, aliae contra enatae ex iis interioribus fibris in medium ſtratum adſcendant, idemque continuando efficiant. Sic ortae hae fibrae transuerſim conſtanter, aut parum ab eo ductu declinando tamen, crenam verſus progrediuntur; ſuntque, vt ſuperiores, in mino-

(*a*) Tab. VII. r.
(*b*) Tab VII. t.
(*c*) Tab. VII. y. 1.
(*d*) Tab. VII. z. 2. 3. 4.
(*e*) Tab. VII. 9.

minores aliquas pariter variabiles faſciolas diuiſae. Earum tres tantum in hoc corde, in aliis quatuor aut plures, obſeruantur. Prima illarum (*a*) ex inſigni columna aliqua fibris nonnullis continuando, caeteris ex interioribus parietalibus fibris emergendo, oritur, oblique paulisper crenam verſus procedit et ad aliquam portionem transuerſalium ſuperiorum (*b*) ſe applicat. Secunda (*c*), ſimili ratione ex hiatu emergendo orta, transuerſim recta fibris aequalibus ad crenam progreditur, prope quam ita ſe ad externas applicat fibras, vt hiatum relinquat in medio ſtrato annularem, rotundum exacte foramen, externo ſtrato remoto, exhibentem. (*d*) Tertia, (*e*) pari modo orta, fibris maxime transuerſis ad crenam vsque peruenit, in eamque inſeritur. Aliquis in hac ſede prope crenam ad finem transuerſalium inferiorum hiatus conſtanter fere eſſe ſolet. Longe maiorem in alio corde, nec multo ventrali minorem, vidi. Occurrunt etiam defectus eiusmodi in ipſis ſuperioribus transuerſis prope crenam. Vbi, quemadmodum firmius omnino externis mediae ſenſim fibrae adnaſcuntur, difficiliusque ſoluuntur ab iis; variis in ſedibus frequenter accidit, vt nulla prorſus ratione ſolui queant, quin vnas potius easdemque fibras, ſiue externas, ſiue medias, eas vocare volueris, efficiant, quibus ergo externarum loco remotis, defectus mediarum in ſedibus iis apparent.

De medii ſtrati defectibus.

Maximus ergo medii ſtrati fibrarum ventriculi dextri defectus in apicis regione eſt, cuius tota ſuperior ſuperficies his

(*a*) Tab. VII. 13.
(*b*) Tab. VII. 14.
(*c*) Tab. VII. 20.
(*d*) Tab. VII. 17.
(*e*) Tab. VII. 21.

his fibris omnino caret, (*a*) inferior quin careat frequenter, quin interni potius, quae ſtrato externo remoto tum iis in ſedibus apparent, fibrae, quam medii, ſint ſtrati, dubitandum admodum eſt. Deinde hiatus ventralis ſequitur, (*b*) largo pariter ambitu circumſcriptus, et proximus defectui regionis apicis, niſi omnino contiguus, et confluens cum illo, vt pro eodem defectu maiori in ſuperiori ſuperficie, in eademque prope marginem magis quam alibi verſus baſin ventriculi producto, ſit fere habendus. Solis enim paucis deſcriptis ſolitariis fibris apicis defectus ab hiatu ventriculi diſtinguitur, quae ergo, vti conſtantes minime ſunt, vbi deficiunt, hiatus ventralis omnino cum defectu regionis apicis confluit, vnumque maiorem efficit defectum medii ſtrati in hac circa apicem ſede. Minus tandem inſignes, at certi tamen et conſtantes, qui prope crenam frequintes occurrunt (*c*), transuerſalium fibrarum inferiorum ſuperiorumque defectus ſunt. Copioſiſſimae contra maximeque ſtipatae fibrae non modo, ſed denſiſſimae quoque, et craſſiſſimae, circa baſin ventriculi, et ad marginem baſilarem, in ſedibus angularium fibrarum, in inferiori aeque ac ſuperiori ſuperficie, reperiuntur, et in angulo ipſo ventriculi. Inde apicem verſus et crenam verſus magis magisque tenuiores euadunt, tandemque deficiunt. Vt, ex qua regione imprimis originem fibrae ducant, copioſiſſimae eſſe, quorſum inde ſe diſtribuant, maxime deficere tandem videantur.

(*a*) Tab. VII. 12. D. 25.
(*b*) Tab. VII. 2. 12. 7. 19. 11.
(*c*) Tab. VII. 16. 17.

EXPERIMENTA
AD IMITATIONEM, INVENTAE A CLAR. D. FAXE,
CHARTAE SIC DICTAE LAPIDEAE,
VEL
ARDESIAE ARTIFICIALIS;

Inſtituta a
J. G. GEORGI.

Conuent. exhib. d. 7 Apr. 1788.

Aliquot anni ſunt ex quo nouellis publicis et litterariis nunciatum et celebratum fuit inuentum viri clariſſimi et apud Succos Thalasſiatri eminentiſſimi Domini Arfuid Faxe, Caroli coronae iam plurimis experimentis confirmatum, ſed nondum publicum quantumuis vtiliſſimum, conficiendi ſpeciem quandam *Ardeſiae artificialis*, ſeu *Chartam lapideſcentem*, ardeſiae loco ad vſus oeconomicos adhibendam viliſſimoque praetio parabilis. Ferebatur illam ſimillimam eſſe laminis chartaceis craſſis, quas Bibliopegae adhibent (Pappe), ferrugineo-rufi, albi, vel flaui coloris, duriſſimam, rigidam, cum aliqua tamen elaſticitate, neque maceratione in aqua frigida per plures menſes continuata, nec ebullitione per aliquot horas tractatam mutari; aëri vero expoſitam etiam indurari; igni longiſſime reſiſtere, ſummum vero per flammae ardorem lente tandem vri, ſibi vero relictam ſponte ſtatim exſtingui.

Itaque

Itaque vſus huius chartae in oeconomia contra aquae et ignis pernicioſos effectus multifarios eſſe cuilibet facile apparebat; ad circumſuendas nauium carinas et tecta, quas non ſolum a putredine, ſed et a Teredinum carie praeſeruare posſit; ad arcendum ignem in culinis nauium et promptuariis pulvere pyreo repletis; porro ad tecta domiciliorum, et lignearum-aedium incruſtationem. Adde quod tabulae huius chartae, clauis orichalceis affixae et in commiſſuris caemento quodam oblitae, oleoſo vernice demum inungi et ſic omni externo humore impenetrabiles reddi poſſunt. Tradebatur ſimul Carolicoronae tuguriolum e ligno exſtructum et charta lapidea obductum, dein materia varia combuſtili refertum, accenſae flammae plane integrum ſuperfuiſſe; idemque experimentum Berolini in minori ſtructura lignea repetitum feliciter ſucceſſisſe. Magnam praeterea huius praerogatiuam eſſe, quod leuitate ſua tecta minus grauare et viliori praetio, quam vlla alia pro tectis materia parari poſſit, quandoquidem tabula longitudinem 23 pollicum et 14 pollicum latitudine, Carolicoronae tantum duobus nummis (Schilling) ſuecicae monetae conſtet.

Inuentum tantae vtilitatis et ponderis dignum vtique eſt, quod curioſos excitet ad imitationem, vt magis publicum, ſi fieri poſſit, redderetur. Quam primum igitur ſpecimen huius chartae in Suecia paratae obtinere potui, in hoc incubui, vt modum fabricandi illam detegerem. Fragmentum quod primo examini ſubieci erat craſſitie vnius lineae, laeue, fractura tenerum, et prius allegata requiſita omnia prae ſe ferebat. Analyſin, qua Dnus Antic de Seruin, a Cel. Crell (*Chemiſche Annalen vol.* 2.) excitatus, naturam huius chartae illuſtrare voluit, non ſuffeciſſe perſpiciens, partem ſpeciminis mihi adlati vlteriori ſcrutinio ſubieci, particulam pro tertio comparationis integram relinquens.

Hoc itaque ſcrutinio charta lapidea rufa viſa mihi eſt conſtare:

1. Terra bolari martiali, quae dimidium circiter totius ponderis aequare viſa eſt, et ab admixta forte creta vel terra calcarea, cum acidis aliquantum ferueſcebat. Forſan etiam micacea aliaeque terrae inſuper aderant, quas diſtinguere ad ſcopum minime pertinet.

2. Materia vegetabili, minime ponderoſa, fomenti aemula, veroſimile vulgo pro charta vulgari adhibitae analoga. Haec circiter quartam partem ponderis efficit.

3. Glutine animali, veroſimillime eodem quod vulgo e recrementis variis animalium coquitur et

4. Oleo quodam, quod oleo lini ſimile videbatur; haec (3. 4.) circiter quarta pars ponderis fuerunt.

Aliud ſpecimen, quod a Dn. Cameron Architectore imperiali accepi, easdem fere materias proportione aliquantum diuerſa, continebat. Verum albam chartam lapideam et flauam obtinere hucusque non potui, in quibus, obſeruante Dno Seruin, vitrioli martialis veſtigium reperitur.

Inter plurima inſtituta experimenta quibus compoſitionem huius ſchiſti imitari conatus ſum, illa tantum hic referam, quorum ſucceſſus praecipuus fuit. Ne repetito eodem explicanda ſint, in anteceſſum manipulationem, aptiſſimam viſam, expoſiturus.

Itaque: *Bolus rubra* vel *alba*, *Rubrica fabrilis* et *Creta* ad hunc vſum in ſubtilem pollinem redigebatur.

Maſſa

Maſſa chartacea viliſſimi generis e fabrica papyri petita, aqua macerata, pro vſu fortiter expreſſa ponderabatur. Humidae pondus ſiccatae circiter tertiam partem aequat; in exponendo experimenta, pondus huius materiae tanquam ſiccae referam.

Gluten animale modica aquae quantitate ſoluebatur; *vitriolum* vero *martiale* non ſolutum addidi; *Oleum Lini* crudum, non coctum adhibui.

Defectu ſufficientis quantitatis materiae chartaceae crudae, pro quibusdam experimentis fragmenta laceratae chartae vilioris et ſegmenta Bibliope is reiecta feruenti aquae commiſi, et per trihorium circiter coctam materiam adhibui, quae multo tenerior erat, quam e fabricis adlata. Huius humidae, ſed expreſſae pondus, ſiccatam duabus itidem tertiis ſuperabat.

Maſſa chartacea primum cum ſoluto glutine in mortario mixta, cum additis poſtea terris et vitriolo in paſtam, eodem in mortario, penitus ſubigebatur, cui vltimo infunditur oleum lini. Maſſa hoc modo parata in aſſerculo marginato ſupra expanſam plagulam chartae vilioris ſpathula aequaliter extenditur, altera plagula tegitur, ſuperque impoſito aſſerculo et inuerſa plagula charta ſuperior detrahitur, teſſula maſſae compreſſae, in aſſerculum arena conſperſum, ſubverſo modulo proiicitur, detractaque etiam altera plagula, ſiccationi relinquitur. Si maſſa pro pluribus teſſulis ſufficit, ſatis cito labor ſuccedit. Siccantur aequaliter et ſine rimis, ſed curuantur vario modo, vnde aſſerculi cum teſſulis huius maſſae, inuicem ſuperimpoſiti, ſubinde praelo ſubiiciendi ſunt.

Experimentum I.

Maſſae chartaceae ſiccae ſesquiunciam ſubegi cum vnciis duabus glutinis vulgaris; admiſcui boli rubrae et rubricae fabrilis ana vncias duo. Tabellam ſic obtinui aequabilem.

Experimentum II.

Maſſae chartaceae ad vncias duas, addidi boli rubrae pulueratae quatuor vncias, et dimidium cretae, cum ſesquivncia glutinis animalis. Nata inde eſt tabula hiulca et rugoſa, ſed admodum dura.

Experimentum III.

Sesquiuncia maſſae chartaceae cum quatuor boli et vitrioli martis duabus vnciis, tabulam efficit itidem duriſſimam, ſed inaequalem.

Experimentum IV.

Maſſae papyraceae vncia, cum ſemuncia glutinis ſubacta, intrita vncia cretae vna et duabus boli, cum vncia olei lini; produxit teſſulas duas tenuiores, aequabiles, duras.

Experimentum V.

Maſſae chartaceae duae vnciae cum ſemuncia glutinis, ſex boli rubri et duabus cretae vnciis ſubactae; additis etiam duabus vnciis vitrioli martis, totidemque olei lini, praebuit tabulas aequabiles, ſed parum firmas.

Experimentum VI.

Maſſae chartaceae ſesquiuncia, et glutinis vncia, cum quatuor vnciis boli albae, dedit tabulam aequalem, pulchram, duram.

Expe-

Experimentum VII.

Sesquiuncia magmatis chartacei, duabus vnciis glutinis imbuta, cum duabus vnciis boli albae, totidemque cretae, dedit tabellam aequalem, duritiei oſſeae.

Experimentum VIII.

Maſſae chartaceae vncia, glutinis vncia, tres vnciae boli albae et vncia olei lini, effecerunt tabellam ſatis perfectam, et elaſticam.

Experimentum IX.

Praecedentem ſuperauit adhuc tabella, quam confeci ex vncia maſſae vegetabilis, cum ſemuncia glutinis, tribus vnciis boli albae, vncia cretae, et ſesquiuncia olei lini. Impreſſas figuras retinet haec materia et cum drachma dimidia caerulei Berolinenſis tincta, colorem aeruginoſe viridem ſuſcepit.

Experimentum X.

Maſſae chartaceae ſesquiuncia, cum vncia glutinis et quatuor vnciis cretae, praebuit tabellam valde ſpongioſam.

Experimentum XI.

Maſſae eiusdem ſesquiuncia et vitrioli martis vncia cum quatuor vnciis boli albae, ſine glutine, effecit tabulam flaueſcentem ſpongioſam.

Experimentum XII.

Sesquiuncia magmatis chartacei et quatuor vnciae boli albae, cum anatica vncia vitrioli martis et glutinis, paulo ſolidiorem tabellam flaueſcentem ſiſtebat.

Plu-

Plures mixturas, quae inferioris notae producta praebuerunt, ſilentio premam.

Praeparatas expoſitis modis tabellas in plura fragmenta diſſecaui et cuiusuis ſpecimen oleo lini cocto inunxi. Inunctae particulae colorem obſcuriorem induerunt, ſuperficiem ſolidiorem acquiſiuerunt, neque tamen igni peius reſiſtebant.

Volui producta meorum experimentorum, cum ſuecicis ſpeciminibus comparare: ideoque cuiuslibet pollicem quadratum in aqua frigida maceraui. Poſt quatuor menſium macerationem ſpecimina cum vitriolo parata ſatis inſigniter intumuerunt; ea vero, quae absque oleo lini confecta erant, vix euidenter turgeſcebant; ea tandem quae oleo cocto ſeu vernice lini obduxeram, naturam ſuam plane non mutauerant, aeque ac ſuecicum.

Impoſui ſpathae ferreae pollicem quadratum aequantia ſpecimina omnium exemplorum, ſimulque ſimile ſegmentum ligni betulini, omniaque ardori flammae in oſtio fornacis probe ardentis oppoſui. Poſt quindecim minuta lignum exardeſcere cepit, et aliis quindecim minutis elapſis in cineres abiit. Fragmenta chartae lapideae varie compoſitae, tantundem ardori expoſitae adeo candefacta erant, vt aquae immiſſa cum ſibilo extinguerentur. Singula tunc curioſe examinaui.

Suecanae fabricae fragmentum in ſuperficie nigreſcebat, paruisque bullulis intumuerat, verum plane non exarſiſſe neque formam mutaſſe videbatur.

Specimina cum vitriolo parata ſpongioſiora in marginibus arſerunt, adeo lente tamen, vt praedicto temporis ſpatio vix

vix ad quartam partem ambuſta ſunt, quae ex iis peioris notae fuerant. Reliqua omnia ſuecano ſpecimine nihilo peius igni refragabantur, ita vt pleraque tantum in ſuperficie nigricantia euaſerint, neque in vllis bullae adeſſent. Nequidem vlla differentia apparuit, adhibito glutini vel oleo lini tribuenda; conſiſtentia omnibus eadem, nullaque ab ardore contorta videbantur.

Eadem igne toſta fragmenta impoſui dein laminae ferreae rubro candenti et ſtatim igni fornacis medio ad quindecim minuta immiſi. Tum vero ſuecicum ſpecimen exarſit et per quinque minuta flamman ſpiſſam fumantem emiſit, dein vero candeſcebat aliquamdiu et quindecimo elapſo minuto in tres laminas friabiles cineritias mutatum apparuit.

Specimen *experimenti* mei *primi* poſt vnum minutum exarſit, per tria minuata flammam aluit et poſt quindecim minuta in tabellam nigram ſatis duram verſum eſt. Eodem fere modo ſe geſſerunt ſpecimina *ſecundi*, 3*tii* et 4*ti experimenti.*

Tabella 5*ti experimenti* citius ab igne deſtructa et friabilis inſtar ſuecicae fuit.

Tabella vero *experimenti 6ti*, quae prius ab igne vix mutata erat, vltimam etiam toſturam bene tulit, vix mutata forma et magnitudine, ſatis dura manſit, tantum nigra facta et quaſi vſtulata.

Specimen 7*mi experimenti* minuto integro flagrabat, nigraque facta eſt et friabilior praecedentibus.

Specimen *experimenti* 8*vi* per duo minuta flagrabat, tumque ſuperfuit nigrum et ſatis durum. Idem fere fatum fuit *noni* ſpeciminis.

Decimum vero *ſpecimen*, licet nigreſceret, vix tamen mutatum erat.

Vndecimi experimenti fragmentum per duo minuta cum flamma arſit et in cineres plane rediit; quae etiam mala ſors fuit *duodecimi experimenti*.

Caementum, quod Sueci ad replenda tabellarum intervalla commendarunt, et cuius ſpecimen a Dno Cameron habui, compoſitum erat e vernice olei lini, ceruſſa et creta, conſiſtentia paulo fluidiore mixtis, vt facilius fiſſuris ſeſe inſinuet.

Quandoquidem vero praecipuus inuenti vſus ad tegendas et incruſtandas domus dirigitur, volui producta meo etiam effectui tempeſtatum exponere. Itaque ſuecanae chartae lapideae, aeque ac a me confectae fragmenta omnium experimentorum in aſſerculo clauis affixa, oblitis caemento fiſſuris in tecto habitaculi Auguſto menſe a. pr. expoſui et in initio Aprilis a. c. non mutata vidi.

Externa qualitate et virtute igni vel aquae reſiſtendi eminent producta noſtrorum *Experimentorum quarti*, *ſexti*, *ſeptimi*, *octaui*, atque *noni*. Eadem etiam ab intemperie aëris, nihil magis ſuecana charta lapidea, corrupta ſunt. Materies prima pro confectione requiſita facile et vili pretio obtinetur, confectio ſimplex eſt et ſatis cito procedit. Specimina equidem noſtra nondum ea, qua ſuecicum productum, elegantia et cura compacta ſunt; exercitio tamen et vſu haec quoque perfectio attingi poſſet; immo imperfectiora etiam pro vſu oeconomico ſic ſatis ſufficerent, vt hoc inuentum omnino Roſſis magno emolumento eſſe queat.

DE-

DESCRIPTIO
CHARACIS LEVCOMETOPONTIS.

Auctore

BAS. ZUIEW.

Conuent. exhib. d. 1 *Mai* 1788.

Tab. V.

Truttam equidem primo intuitu referret piſcis noſter, vt et in catalogo muſei noſtri academici ſub nomine truttae fluuiatilis deſignatus eſt, ſi accuratius examen membranae branchioſtegae quadriradiatae non iuberet diuellere illum a truttarum familia, vel dentes praeſertim anteriores conſpicui a coregonis ſeparare et adnumerare cohorti characum. Caput albidum, praecipueque frons, anſam mihi dedere illum Leucometopontis nomine cognominare, idque eam potius ob rationem, vt a congeneri ſuo charace immaculato eo facilius dignoſcatur.

Charax Leucometopon.

Magnitudo et forma albulae groſſioris.

Corpus Cathetoplateum, oblongum, toruloſum, ab occipite ad pinnam dorſalem parum gibbum; ſquamis mediocribus, tenerioribus, ſemiorbiculatis laeuibusque tectum; lineis longitudinalibus per latera a capite ad caudam parallelis, maculisque hic-ibi ſparſis decoloribus notatum.

Caput ſubproportionale, porrectiuſculum, alepidotum, glabrum, *fronte* fornicata, glaberrima, alba, lateribus ſubcompreſſis. *Roſtrum* ſubacutum, maxilla ſuperiore longiore; *Rictus* transuerſus, ſubarcuatus, exiguus; *Labium ſuperius* vnicum, carnoſum, antrorſum productum, ad latera oris duplicatum, lobo angulari in ſinu profundo inter maxillam ſuperiorem & inferiorem recondendo; ad marginem papillis ordinatis ceu dentibus inſtructum; *Labium inferius* antrorſum truncatum margine papillis eminentioribus denticulatum, ad angulos oris pariter profunde duplicatum. *Dentes* in vtraque maxilla, vnico ordine, minuti, complanati, antrorſum porrecti, mobiles, ad marginem fuſceſcentes; in ſuperiore maxilla ſubaequales, recti, paralleli, duobus anterioribus eminentioribus, numero octo; in inferiori ſex, quorum duo anteriores longiores, incuruati, plani. *Nares* in medio fere inter apicem roſtri et oculos, laterales, geminae, poſteriores ouales, anteriores tubulo cylindrico cutaneo quaſi pinnula inſtructae.

Oculi in medio capitis latere, vix protuberantes, orbiculati, mediocres, membrana nictitante ſemicirculari, oculum a tergo tegente; *pupilla* ſubrotunda. *Iris* aurea.

Opercula branchiarum lateralia, ſimplicia, duriuſcula, ſubarcuata, laeuia, cute communi tecta et aucta, ſupra libera, infra ſimul cum pinnis branchialibus corpori adnata. *Membrana branchioſtega* radiis conſtat quatuor, cute denſa, alba, ſub gula plana, adnata tectis, extra opercula conſpicuis. *Apertura branchialis* lateralis, mediocris, operculis perfecte clauſilis.

Dorſum monopterigium, a nucha ad exordium pinnae dorſalis parum gibbum, poſt pinnam dorſalem deſcendens, rotundum, *Latera* plana, vt dixi, lineis parallelis maculiſque ſine

ne dubio rubris, nunc a ſpiritu vini colore priuatis, obſoletis picta; *Abdomen* carinatum. *Linea lateralis* recta, per media latera protenſa, mutica. *Anus* longe poſt aequilibrium, patens. *Cauda* compreſſa, breuis.

Pinna dorſalis parum poſt medium corporis, in ſulco inter ſquamas repoſita, radiis fere omnibus eiusdem longitudinis, numero 13. ad apicem rotundata. *Pinna adipoſa* obouata, fere pellucida, medioeris. *Pinnae pectorales* ad latera thoracis inferiora, acuminatae, proportionales, radiis 16. ſquamis ad baſin maioribus cuneiformibus, duplicatis. *Pinnae ventrales* in abdomine ſiti directe ſub pinna dorſali, ſibi inuicem approximatae, radiis 10. appendicibus ad baſin lanceolatis, mollioribus. *Pinna ani* medium inter anum et caudam ſpatium occupat, ſub pinna adipoſa, radiis 10. ſecundo longiori, caeteris vno poſt alterum breuioribus, vnde erecta euadit quaſi triangularis. *Pinna caudae* bifida, lacinia ſuperiori paulo longiori, radiis, quod laeſa eſt, non facile connumerandis. *Color*, totius piſcis videtur rubellus fuiſſe, ſed in ſpiritu vini penitus euanuit.

Sumtus eſt ex collectione Dhalbergiana, et videtur marinae proſapiae eſſe.

Dimenſiones

Characis Leucometopontis.

Secundum pedem pariſinum.

Longitudo totius piſcis ab apice maxillae ſuperioris ad extimum apicem pinnae caudae - - - - 7 poll.

ab apice maxillae ſuperioris ad nucham -	1	Poll.	1	Lin.
- - - - ad extrema operculorum	1	—	5	—
- - - - ad nares - - -			4	—
- - - - ad medium oculum - -			9	—
altitudo roſtri ad nares - - - - -			1	—
—— capitis ad nucham - - -	1	—	1	—
altitudo roſtri inter angulos oris - - -			4	—
—— capitis inter oculos - - - -			8	—
Diameter oculi - - - - - -			3½	—
Diſtantia pinnae dorſalis a nucha - - -	1	—	9	—
Longitudo pinnae dorſi ad baſin - - -	1	—		—
altitudo eiusdem - - - - -	1	—	6	—
inter pinnam dorſi et adipoſam - - -	1	—	6	—
a pinna adipoſa ad originem pinnae caudae	—		10	—
Craſſities trunci ſub pinna dorſi - - - -			9	—
altitudo trunci poſt nucham - - - -	1	—	6	—
—— ad originem pinnae dorſi - - -	1	—	8	—
—— ad pinnam adipoſam - - -	1	—	1	—
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	1	—		—
- - - ventralium - - -	1	—		—
- - pinnae ſubcaudalis - - -	1	—	1	—
altitudo pinnae ſubcandalis - - - -		—	7	—
Diſtantia ani ab apice maxillae inferioris -	4	—	7	—
Longitudo pinnae caudae - - - -	1	—	2	—

ECHE-

ECHENEIDIS NOVA SPECIES.

Auctore

BASILIO ZUIEW.

Conuent. exhib. die 1 *Mai*, 1788.

Tab. VI.

Binas ſolummodo memorat Linnaeus Echeneidum ſpecies, Remoram nempe antiquiſſimis temporibus notam et Neucratem, facie externa et numero ſulcorum in capitis clypeo inter ſe diſtinctiſſimas; tertiam nunc hic praeſtare lubet in muſeo noſtro Academico exiſtentem, quae licet in multis conuenit cum Neucrate; maxilla tamen inferiore multum longiore, clypeo maiori, et minori in illo ſulcorum numero differt ab ipſo eo modo, vt nequaquam pro varietate eiusdem haberi poteſt. Hinc tertiam huius generis ſpeciem introducendo ratum mihi duxi eam accuratiori tradere deſcriptioni et pro affinitate eius cum Neucrate imponere nomen *Neucratoidis*.

Echeneis Neucratoides.

Magnitudo et facies fere Neucratae.

Corpus antrorſum ad dimidium fere plagioplateum, retrorſum teres, oblongum, ad caudam ſenſim decreſcens. *Squamae*

mae nullae, niſi papillas cutaneas molles, minimas, ſimili ordine ſitas pro iis habeas; *cutis* coriacea, tenax. *Color* in dorſo nigreſcens, ſub ventre albidior.

Caput plagioplateum, elongatum, transuerſim corpore latius, ſupra clypeo a labio ſuperiori vltra nucham tectum, infra cute nuda, laeuiſſima albicante veſtitum. *Maxillae* planae, mediae magnitudinis, non extractiles, terminantur ad apicem roſtri in formam angulorum; inferior multo longior. *Labia* apparent ſolummodo ad angulos oris, vbi oblique deſcendendo in ſinubus reconduntur; ſuperius per totum marginem papillulis veluti dentibus ciliatum, obtegens intus lamellam corneam minutiſſime denticulatam, dentesque maxillae aceroſos obvallantem; inferius ad angulos oris retroflexum porrigitur in apicem ſuperiore maxilla multo longiorem, carnoſum, maxillam, dentibus minutiſſimis obſitam, per medium quaſi freno labiali dividentem. *Rictus oris* horizontalis, diductis mandibulis aperturam referens ſemicircularem, mediocrem. *Dentes* minimi, acutiſſimi, inordinati, aequales, immobiles, in vtraque maxilla, palato et lingua, quorum maxillae ſuperiori inſidentes extrinſecus membrana cornea ſupradicta ad marginem denticulis ciliata obvallati; in mandibula vero inferiori formant binos quaſi conos per latera maxillae proſtratos, intus parum incuruatos et quidem maxilla ſuperiori non tegendos. *Lingua* integerrima, libera, latiuscula, obtuſa, ſupra dentibus exaſperata, ad marginem membrana papilloſa circumdata. *Nares* in medio fere inter oculos et roſtri apicem, in ſumma capitis parte; foramina bina vtrinque, ſibi inuicem maxime vicina; poſterius ſemicirculare, anterius lunare, ambo operculis cutaneis, primum a fronte, alterum a tergo clauſilia. *Oculi* ad ſuprema capitis latera, medii fere inter apicem maxillae ſuperioris et finem operculorum, planiusculi, rotundi, mediocres, membrana nictitante ſemitecti; *pupilla*

pupilla ſphaerica, *Iride* aurea fuſceſcente. *Opercula branchialia* Monophylla, integra, carnoſa, ſubflexilia, margine poſteriori arcuato, cute laeuiſſima argentea tecta, faſcia longitudinali ab apertura per oculos ad angulos oris vertici parallela notata. *Membrana branchioſtega* radiis 10. extra opercula conſpicuis, ſub gula, cute tenaci tecta; ab vtroque inſuper latere gulae habentur ſulci profundi, operculorum margini contermini ad mentum vsque protenſi, diſtantes, paralleli. *Apertura branchialis* a vertice ad gulam vsque in formam arcus fiſſa, operculis radiisque penitus claudenda. *Vertex* clypeatus; clypeo ouato-oblongo, plano, pectinibus 20. parium, parallelis, transuerſis, anterioribus 3. paribus parum antrorſum, poſterioribus quinque paribus retrorſum ſpectantibus.

Dorſum planum, toroſum, fuſceſcens, ſulco a nucha ad baſin pinnae dorſalis lato, nigricante notatum. *Latera* conuexa, dorſo concoloria. *Gula* cum thorace anterius planiuſcula, ad pinnas pectorales carinata, alba; *venter* prominulus, rotundus, albus, ſub pinnis pectoralibus et in medio nigricans. *Anus* in medio inter caput et pinnam caudalem, patens, radiatus, ſinu poſt orificium triangulari auctus. *Cauda* elongata, cylindrica, ad apicem adtenuata.

Linea lateralis incipit a latere verticis tendens ſupra pinnas pectorales plano dorſo paralleliter, ſub medio fere dorſo incuruatur et fit ad extremam vsque caudam media, poris ſeu punctis minimis diſtinctiſſimis conſpicua.

Pinna dorſalis vnica, radiata, pone aequilibrium, incipit ab extremo dorſo et deſcendit ſenſim decreſcendo ad originem fere pinnae caudalis, conſtat radiis 35. Pinnae pectorales fere ad ſuprema aperturarum branchialium, dorſo proximae, baſi

 pri-

primorum radiorum eidem parallelae, ceterorum ad ventrem incuruatae, proportionales, triangulatae, radiis 20. tertio et quarto ceteris longioribus. *Pinnae ventrales* ſub pinnis pectoralibus, ſibi inuicem approximatae, ad baſin inſuper membrana tenui pellucida iunctae, acuminatae, mediocres, radiis 5. *Pinna ſubcaudalis* ab ano ad caudam porrecta, dorſali ſimilis, aequalis, declinata radiis 35. *Pinna caudae* terminalis, diſtincta, rotundata, medio acuminata, nigricans, radiis 16.

Locus ſine dubio idem cum ſuis affinibus pelagicus.

Dimenſiones ſecundum pedem pariſinum.

Longitudo totius piſcis ab extremo apice mandibulae inferioris ad extimum apicem pinnae caudalis	7 Poll.	
Ab apice maxillae ſuperioris ad originem pinnae dorſi	3 —	
Longitudo capitis ab apice mandibulae ſuperioris ad finem operculorum	1 —	1 Linea.
Longitudo maxillae inferioris extra maxillam inferiorem		2 —
Latitudo capitis inter oculos		8½ —
— — ad aperturas branchiales		10 —
Longitudo clypei	1 —	8 —
Latitudo eius maxima		8 —
Altitudo apicis roſtri maxillis clauſis		2 —
— capitis ad gulum		6 —
Ab apice maxillae ſuperioris ad angulos oris		3½ —
Diſtantia inter angulos oris		6 —
Ab angulis oris ad medium oculum		4 —
Diameter orbitae		3 —
Diſtantia inter ſulcos menti		2 —

Lati-

Latitudo dorſi ſub pinnis pectoralibus - -		9	Linea.
Altitudo abdominis ſumma - - - -		8	——
Craſſities minima caudae - - - - -		2	——
Latitudo ſulci dorſalis - - - - - -		$1\frac{1}{2}$	——
Diſtantia ani ab apice maxillae inferioris -	3 Poll.	2	——
Longitudo pinnae dorſi - - - -	2 ——	5	——
Altitudo pinnae dorſi ſumma - - - -		3	——
Longitudo pinnae ani - - - -	2 ——	5	——
Altitudo pinnae ani - - - - -		4	——
Longitudo pinnae pectoralis - - - -		9	——
Latitudo pinnae pectoralis ſumma - - -		$5\frac{1}{2}$	——
Longitudo pinnae ventralis ſumma - - -		$9\frac{1}{2}$	——
Latitudo pinnae ventralis ſumma - - -		$2\frac{1}{2}$	——
Longitudo pinnae caudae ſumma - - -		9	——
Latitudo eiusdem - - - - - -		6	——

ENODATIO QVAESTIONIS AN INDOLES MATRICIS METALLIFERAE ET METALLI QVOD CONTINET, NOTAM PRAEBET CERTAM QVA DIGNOSCI POSSVNT MONTES PRIMARII A SECVNDARIIS?

Auctore
J. J. FERBER.

Conuent. exhib. die 8 Maii 1788.

Quo magis Orologiae ſtudium excolitur, eo certius conuincimur, montes non omnes vno eodemque tempore fuiſſe creatos, ſed ſucceſſiuis geocosmi mutationibus ſuam debere originem. Sunt vetuſtiores, quos primaeuos credunt haud pauci, profundis radicibus, ſi ita dicam, terrae gremio adfixi, altitudine ſua, ſtratorum craſſitie et petrae natura a ſummitate ad baſin parum variante, conſpicui, quos a reliquis proprie ſic dictis ſtratoſis, minus eleuatis, et diuerſo interdum petrae genere, ſibi inuicem impoſito, conflatis, facile diſtinguere licet, ſi largiore ſenſu rem modo conſideramus. Hos *ſecundarios*, junioresque *tertiarios* vocant, quia a *primariis* ortum trahunt, et particulis eorum, lapſu ac iniuriis temporis aërisue auulſis iterumque coadunatis compoſiti et ad pedes eorum ſiti ſunt. Dum autem adcuratiori examini montes eorumque ſtrata ſubmittimus, et de peculiari quodam ſaxo ſermo eſt, fieri poteſt, vt ea, quae generatim differentiam montes inter primarios et ſecundarios efficiunt, criteria non vbiuis clare in oculos cadant, ſed hinc inde ambigua exiſtant, ita vt certi nihil pronunciari queat. Sunt nimirum montes facile omnes, vulcanicis rupibus ex-

exceptis, vi aquae formati. In primariis nonnullis ſtrata occurrunt aeque perſpicua ac in ſecundariis, maiore quamuis craſſitie plerumque donata. Quae autem a maiori minoriue dimenſione deſumuntur notae admodum lubricae ſunt. Montibus calcareis porro antiquioris formationis, ſalinos ſic dictos puta, et ſaxis porphyraceis aliisue petris, ſchiſtus argillaceus aut granites ſemper baſis eſt, cui fundamenti inſtar ſuperſtructae deprehenduntur. Vbi iam accidit, vt baſis ſimul ac ſaxum ei impoſitum e terra promineant, et vtrumque a ſuperficie ſoli eleuatum oculis luſtrari poſſit, nonne ſpeciem montis ſecundarii hic prae ſe fert, quaſi vnicum montem, pluribus ſtratis diuerſae indolis compoſitum conſtitueret, craſſiora quamuis haec ſtrata appareant, quam in ſecundariis montibus communiter occurrant? Nonne tyroni ſaltem, haec obſeruanti, dubia exſurgere poſſunt, an mons iſte ad primarios vel ſecundarios numerari debeat? Haec vt tollantur dubia, varia a Mineralogis in vſum vocari ſolent adminicula, quae tamen non omnia certitudine ſua ſeſe commendant, quia anteceptis opinionibus, experientiae non congruis, nituntur.

Montes ſecundarios nullas continere venas metallicas, dictum deciesque repetitum eſt; plura autem vt taceam exempla, fodinae Derbyenſes in Anglia contrarium demonſtrant, de quibus conferri poſſunt quae in Deſcriptione harum fodinarum dixi, vnde ſatis colligitur, mineram plumbi in veris venis, nec, vt rem explicare voluit nonnemo, in interſtiis abruptis ſtratorum (in Kämmen oder Wechſeln der Flöze) ibi hoſpitari. Non magnam praeterea differentiam inter veram venam metallicam et rimam abruptam ſtratorum, rurſus conſolidatam metalloque quodam impletam intercedere, alia forſan occaſione oſtendam. Tractus montium medios metalla ſolum fo ere, altioraque iuga praerupta, nec ſenſim adſcendentia (ſtückſichte und ſteile hohe Berge) venis metallicis prorſus carere, in quo granitem nunquam fere argentum aurumue contin ere, praeſuppoſitum fuit diu, do-

 nec

nec ſodinae Scharſenbergenſes, Fürſtenbergenſes et quod ad altiora iuga ſpectat, Allemontanae in Delphinatu, Salisburgenſes, alpes lapponicae et ſibiricae caet. meliora docuerint. Quin ſumma alpium cacumina granitoſa ſterilia plerumque ſint, non dubito; id autem regulae inſtar absque exceptione ponere, non audeo. Ita etiam creditum fuit, aurum non niſi in calidis regionibus occurrere, quaſi radiis ſolaribus matureſceret; effoditur vero in Suecia, Noruegia et Sibiria.

Haec vt mittam, argumentum, quod hac vice mihi propoſui, paulo attentius conſiderare libet. Scripta mineralogorum ſi euoluuntur, exempla offendimus, eos nonnunquam autumaſſe, hoc vel illud lapidis vel alius corporis, mineralis proſapiae, genus non niſi in montibus ſecundariis inueniri, alia vero primariis tantum competere iisque propria eſſe. Pari quoque modo nonnulla ſaltem metalla montibus ſecundariis prorſus eſſe peregrina, nec vnquam in illis inueniri, contendunt. Haec vero aſſerta ruunt, ſi argumenta, quibus nituntur, et documenta, quae exempli locô adferri ſolent, propius examinamus.

Saxum, quod Suecis *Trapp* audit, et in Weſtrogothia, petrae arenaceae aliisque ſtratis ſuperincumbit, quorum baſis profundiſſima granites eſt, iure ſecundarium dici meretur. Idem lapis autem, dum venas metallicas montium primariorum in ferriſodinis Sueciae, Norvegiae etc. nec non venas argentiferas Ioachimsthalienſes comitatur aut ſecat, ſaxa horum montium variis in locis perforat, faſcias admodum latas profundeque tendentes conſtituit, vetuſtioris omnino eſt originis. Finlandiae prouincia roſſica longam ſeriem montium continet, qui ſaxo Trapp conſtant, altitudine conſpicua gaudent et marmori textura ſalina praedito ibidem incumbunt, quod rurſus ſchiſto et graniti ſuperſtruitur *). Iſte Trapp venas metalliferas fovet

*) Pallas nord. Beyträge. 1 Th. S. 136 — 137 und S. 148 — 149.

vet *), in vicinia montis gneiſoſi et auriferi: *Woitza* dicti, decurrit **), et antiquitate ſane marmori cedit, cui ſuperior eſt, ſed ſi cum ſaxo weſtrogothico trappaceo comparatur, hoc ſine dubio recentioris eſt originis. Hic igitur tria habemus ſpecimina vnius eiusdemque lapidis vel ſaxi, quae ſingula aetate inter ſe differunt, et ſatis ſuperque demonſtrant, eam ab indole petrae non erui poſſe.

Plurima *bitumina*, quae hucusque ad regnum minerale referuntur, e regno vel vegetabili vel animali ortum trahere, dubitare nolumus. Impreſſiones plantarum et filicum in ſchisto ſecundario, qui carbones foſſiles communiter tegit, indicare videntur, haec vegetabilia extractione vel deſtillatione quadam per deſcenſum oleum et phlogiſticam materiam largiiſſe, qua imbuti ſunt carbones foſſiles. Fodinae ſuccini pruſſicae in collibus ſabuloſis maritimis ad *Groſsbubenicken*, prope *Pillau*, quae iuſſu Miniſtri ſtatus, liberi Baronis *ab Heinitz*, excauatae ſunt, non modo largiorem meſſem ſuccini maioraque fruſtula, rimis minus pertuſa, quam antea dum in fluctibus et arena maris procellis agitati, cum periculo vitae hominum piscatura inſtituebatur, procurarunt, verum etiam originem ſuccini vegetabilem in apricum poſuerunt. Sunt nimirum colles ſabuloſi ad litora maris pruſſici a vento conflati, qui verticali pariete ſatis alto oram maris ſpectant, vbi ſtrata interiora apparent, quorum nonnulla nigro colore eminent. Effoſſis puteis in his collibus, circa mille paſſuum diſtantia a litore, eadem haec ſtrata, paulisper verſus mare inclinata, in debita profunditate rurſus inuenta ſunt. In his trunci arborum Pini magna copia inveniuntur, ita vt credere fas ſit, integra Pineta violentia venti et vndis ſolum erodentibus fuiſſe ſubmerſa et dein ſabulo operta. Cuniculis ſecundum haec ſtrata nigra protuſis corumque

*) ibid. p 149.

**) p. 143.

que ductu verſus continentem continuatis, obſeruatum eſt, ſylvas ſubterraneas hic reperiri, quarum vna altera profundior eſt, itaque prius vi maris et ventus deiecta. Conſtituunt itaque hi trunci plurima ſtrata, vnum ſuper alterum, ſabulo diſtincta; et vbi faſciae nigrae apparent, hae fili ariadnei inſtar inſeruiunt, quorum ductu arboreta iſta attingi poſſunt. Iam vero in et ſuper his truncis, plus minusue diſſolutis, ſuccinum magna copia inuenitur. Occurrunt fruſta ligni plus minusue ſuccino imbuta. Verſus partem inferiorem trunci ſuccinum abundat, excoctum quaſi aut deſtillatione per deſcenſum e materia lignea, quae capitis mortui inſtar reſtat, ſeparatum, quamuis nulla prorſus ignis ſubterranei indicia hic reperire liceat. Quocunque demum modo Succinum elicitum fuerit, id tamen tuto inde colligi poteſt, hoc bitumen vegetabilis eſſe originis. *Gagas* et *ampelites*, vt ſcimus, nihil aliud ſunt, quam lignum bitumine farctum. Haec autem omnia, quamuis ita ſint, originem omnium bituminum e regno vegetabili vel animali neutiquam tamen euincunt, prout contendit erudiſſimus Dnus *Beroldingen*. Aſphaltum et Bitumen in permultis fodinis ferri, montium primariorum inuenitur in Suecia et alibi. Schiſtus antiquae ſatis originis, in fodinis idrienſibus, alpibus calcareis Carnioliae ſubiectus, bitumine imbutus deprehenditur, ne verbum proferam de carbone foſſili tractus primarii ad Wilkiſch in Bohemia *). Quamvis ſaxum, quod *Macigno* vocant Florentinenſes, argillaceo-micaceum, glandulis vel nodis bituminoſis impletum, prout etiam lapis ſic dictus *ſuillus*, montibus antiquiſſimis ſane adnumerari nequeat, minera tamen phlogiſtica Cronſtedti (*Branderz*) in multis fodinis ferri, cupri et argenti, in Suecia, ad Kongsberg Norvegiae, nec non ad Freiberg Saxoniae, in montibus primariis ſitis reperitur. Mare mortuum, lacus Baikal, fontes nonnulli, variae rupes calcareae, nec non Vulcanorum plurimi, vt fertur, petroleum, naphtham, maltham et aſphaltum fundunt. Si

*) Ferbers Beitr. zur mineral. Geſch. von Böhmen. S. 126, 127.

Si omnia haec bitumina e deſtructis vegetabilibus vel animalibus ortum traherent, immenſo temporis ſpatio opus fuiſſet, quo ſenſim ſenſimque colligeretur ea copia, quae continue effluit et quae per ſecula ſufficeret. Receptacula interiora montium, vbi afflueret et ſeruaretur hoc bitumen, effingere et oſtendere opus eſſet, quomodo quantitas eiusdem numero vegetabilium et animalium emortuorum quotannis reſponderet.

Ardeſia tegularis, quae variis in locis tectis inſeruit, ſchiſtus eſt plus minus argillaceus, qui partim in montibus primariis, partim in ſecundariis effoditur. Demonſtrat igitur quoque, qualitatem ſaxi cuiusdam aetatem eius vel tempus formationis neutiquam indigitare. Schiſtus argillaceus Alpium, fodinarum Hercyniae vel Saxoniae, ille tandem qui carbones foſſiles et ſtrata cuprea Ducatus Mansfeldenſis tegit, aetate inter ſe maxime diſcrepant, indole autem multum conueniunt. Nec dici poteſt, alpes calcareas in Carpaticis, omnes ſpecies marmoris, colles calcareos Cracouienſes, ſilice pyromacho impletos, colles cretaceos Galliae et Angliae, inſulas et eleuationes fundi maris meridionalis, quae deſtructis coralliis et teſtaceis originem debent, aut ſtrata ab oſtreis nata verſus litora Hollandiae, vel tandem quatuor ſtrata calcarea Derbyenſia, amygdaloide intercepta, vno eodemque tempore extitiſſe, quamuis terra calcarea, quibus conſtant, vna eademque ſemper maneat.

Sic etiam Gypſum diaphanum vel *Selenites* integros montes ſecundarios format in Palatinatu Sendomirienſi et Cracouienſi Poloniae; ſtrata conſtituit ad Montmartre Pariſiis. In fodinis autem cupreis Herrengrundenſibus Vngariae, cum aliis varietatibus gypſi, matricem praebet minerae cupri griſeae in monte ordinis primitiui. In fodina Semenovienſi ad *Kolyvan* Sibiriae minera plumbi cum ſpato gypſeo et gypſo radiato occurrit, prout in collectione Domini Renovanz, Petroburgi vidi.

Terra et *ſpatum ponderoſum*, prout etiam *fluor* varii coloris et formae in montibus primariis Saxoniae, Sueciae etc. metallis matricem praebent haud raro; in montibus ſecundariis *Salfeldenſibus*, *Camsdorſienſibus*, ad *Glücksbrunn* alibique in Germania, nec non in fodinis *Galliae* (*) et *Angliae*, Derbyenſibus aliisque (**), non ideo tamen deficiunt, ſed magna potius copia occurrunt.

Metalla quod attinet, omnia facile in vtroque montium genere occurrunt. Nimis longum ac taedioſum foret, ſingula haec adducere. Exempli loco vnicum ſufficiat, *Niccolum* puta, Cobalto ſaepius comitatum. Id vero non ſolum in montibus primariis Saxoniae, Bohemiae etc. verum etiam in montibus ſecundariis ſchiſtiferis Rothenburgenſibus alibique reperitur. Et ſic porro.

Ex iis, quae iam dicta ſunt, facile colligitur, qualitatem ſaxi, lapidis aut metalli huius vel illius montis nulla praebere indicia certa, ex quibus indicari poſſit, num ad primarios vel ſecundarios pertineat. Vt igitur alia adminicula adhibeantur, ſi periodum formationis montis cuiusdam eruere velimus, neceſſe eſt. Alia autem via non patet, quam vt ſedulo inquiramus locum, quem tenet hoc vel illud ſaxum, in diſpoſitione aut ſtratificatione montis, de quo ambigitur, ſupra vel infra aliis ſaxis. Sic de granite fidis obſeruationibus nondum conſtat, hoc ſaxum alio cuidam ſuperimpoſitum eſſe; ideoque iure meritoque antiquiſſimum cenſetur, non quia granites eſt, aut hac indole gaudet, ſed quia imum, omnibus reliquis ſubſtratum deprehenditur.

(*) Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Dijon pour l'année 1782. Mémoire de Mr. de Morveau.

(**) Philoſ. Transact. 1784. T. LXXIV. Art. 23. Mémoire de Mr. Whitering.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE ECLIPSI SOLIS. ANNO 1787. DIE $\frac{4}{15}$ IVNII OBSERVATA.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. die 6 Nov. 1788.

Momenta initii et finis huius Eclipſis a me obſeruata proſtant iam in Tomo II. Nouorum Actorum Academiae Scientiarum vna cum obſeruationibus ad cognoſcendum motum horologii habitis. Reuocatis nunc ad calculum obſeruationibus, quas circa partes lucidas durante Eclipſi micrometro obiectiuo inſtitui, exhibeo illas, pro vt promiſi, vna cum concluſionibus, ad quas ſum deductus.

	Tempus Horol.	Tempus verum.	Pars lucida.
Initium	$5^h.22'.30''$	$5^h.55'.36''$	
Obſerv. I.	48. 10	6. 21. 10	$16'. 27'',9$
II.	55. 49	28. 48	12. 23, 0
III.	57. 27	30. 26	11. 35, 5
IV.	58. 52	31. 50	10. 55, 5
V.	6. 0. 7	33. 5	10. 16, 6
VI.	1. 33	34. 31	9. 30, 7
VII.	2. 50	35. 47	9. 1, 0
a	7. 36	40. 33	7. 12, 0
b	10. 13	43. 9	6. 39, 9
c	12. 10	45. 5	6. 18, 0
d	14. 22	47. 37	6. 36, 2
VIII.	24. 37	57. 30	8. 24, 3
IX.	27. 1	59. 53	9. 23, 7
X.	31. 35	7. 4. 27	11. 45, 2
XI.	33. 16	6. 7	12. 42, 4
XII.	35. 22	8. 13	13. 51, 6
XIII.	36. 45	9. 36	14. 41, 2
XIV.	37. 52	10. 43	15. 45, 0
XV.	39. 29	12. 19	16. 39, 0
XVI.	40. 28	13. 18	17. 11, 4
Finis.	7. 3. 17	7. 36. 3	

Antequam ad recenſendas concluſiones ex his obſeruationibus memet accingam, conueniet primum Elementa calculi ex Tabulis Aſtronomicis Maieri hic apponere.

Anno

Anno 1787 die $\frac{1}{13}$ Iunii.

Tempore vero Grenovicenſi -	$4^{h}. 44'. 31''$
ſiue medio - - -	4. 44. 26.
Longitudo ☉lis vera - -	$2^{s}. 24^{\circ}. 22'. 37'',6$
½ Diameter ☉lis - -	· 15. 47, 4
Motus horarius ☉lis -	2. 23, 1
Longitúdo ☽ vera - - -	2. 24. 55. 14, 4
Latitudo ☽ Bor. - -	56. 49, 6
Parallaxis ☽ aequator. - -	61. 26, 7
½ Diameter ☽ - - - - -	16. 47, 1
Motus horar. ☽ in Longit. -	37. 56, 0
- - - - in Latit. -	3. 27, 0
Parall. ☽ — parall. ☉ - -	61. 18, 2

Subſtratis his Elementis ne pro qualibet obſeruatione calculum parallaxium inire neceſſum foret ſtatuta Longitudine obſeruatorii Petropolitani a Grenouico $2^{h}. 1'. 18''$ ſequentem conſtruxi laterculum.

Temp. ver. Petropol.	Longit. ☽ vera.	Parall. Longit.	Latit. ☽ Boreal.	Parall. Latit.
$5^{h}. 55'. 36''$	$84^{\circ}. 23'. 30''$,	$33'. 3'',2$	$59'. 42'',8$	$46'. 44'',3$
6. 15. 36	36. 8,	32. 56, 0	58. 33. 8	47. 48, 0
35. 36	48. 47,	32. 36, 3	57. 24, 8	48. 55, 6
55. 36	85. 1. 26, 0	32. 3, 7	56. 15. 8	49. 59, 5
7. 15. 36	85. 14. 5, 2	31. 18, 1	55. 6, 8	51. 4, 2
7. 36. 3	85. 26. 44,	30: 18, 6	53. 56, 5	52. 8, 0

Vnde pro vnaquaque phaſi per interpolationem computando parallaxim Longitudinis et Latitudinis Lunae ſequentem tabulam obtinui:

Tem-

Tempus ver.	Pars lucida.	Parall. Longit.	Latit. ☽	Parall. Latit.	Latit. appar	½ Diam. ☽ appar.
I. 6^h.21'.10''	997'',9	1970'',6	3494'',6	2886'',8	607'',8	1010'',
II. 28. 48	743, 0	1963, 0	3468, 3	2912, 6	555, 7	
III. 30. 26	695, 5	1961, 4	3462, 5	2918, 1	544, 4	
IV. 31. 50	655, 5	1960, 1	3457, 7	2922, 8	534, 9	1009, 9
V. 33. 5	616, 6	1958, 8	3453, 4	2927, 0	526, 4	
VI. 34. 31	570, 7	1957, 3	3448, 6	2932, 1	514, 5	1009, 8
VII. 35. 47	541, 0	1956, 1	3441, 1	2936, 0	505, 1	1009, 7
a 6. 40. 33	432, 0	1948, 3	3427, 8	2951, 4	476, 4	1009, 6
b 43. 9	390, 9	1944, 0	3418, 8	2959, 7	459, 1	
c 45. 5	378, 0	1941, 2	3412, 1	2967, 3	444, 8	1009, 4
d 47. 37	396, 3	1936, 8	3403, 7	2976, 5	427, 2	
VIII. 6. 57. 30	506, 6	1919, 4	3369, 2	3005, 6	363, 6	1009, 1
IX. 59. 53	566, 1	1914, 0	3361, 1	3013, 3	347, 8	1008, 9
X. 7. 4. 27	708, 1	1903, 6	3345, 2	3028, 1	317, 1	
XI. 6. 7	764, 2	1899, 8	3339, 5	3033, 5	306, 0	1008, 8
XII. 8. 13	831, 6	1895, 0	3332, 1	3040, 3	291, 8	
XIII. 9. 36	881, 2	1892, 2	3327, 7	3044, 8	282, 9	1008, 7
XIV. 10. 43	945, 0	1888, 7	3323, 6	3048, 4	275, 2	1008, 6
XV. 12. 19	999, 0	1885, 6	3318, 1	3053, 5	264, 6	1008, 5
XVI. 7. 13. 18	1034, 1	1883, 4	3314, 8	3056, 7	258, 1	1008, 4

Partibus lucidis ex obſeruationibus VIII. IX. X. et XI. reſultantibus adiectae ſunt ob refractionem correctiones 2'', 3 2'', 4 2'', 9 1'', 8 reliquae minori adhuc indigent correctione id circo ſunt neglectae.

Sepoſitis obſeruationibus circa medium inſtitutis *a. b. c.* et *d* vt pote aeſtimando valori Latitudinis Lunae idoneis, ac poſita correctione diſtantiae centrorum Solis et Lunae δ, Latitudinis vero η reliquae obſeruationes ſequentes pro tempore coniunctionis Solis et Lunae largientur expreſſiones:

I.

I.	5^h.	50′.	12″	$+ 2.06\,\delta - 1.18\,\eta + 0.03\,\pi$.
II.		50.	0	$+ 2.32\,\delta - 1.60\,\eta + 0.37\,\pi$.
III.		50.	7	$+ 2.44\,\delta - 1.76\,\eta + 0.51\,\pi$.
IV.		50.	8	$+ 2.55\,\delta - 1.91\,\eta + 0.63\,\pi$.
V.		50.	7	$+ 2.70\,\delta - 2.12\,\eta + 0.79\,\pi$.
VI.		50.	8	$+ 2.85\,\delta - 2.41\,\eta + 0.95\,\pi$.
VII.		50.	3	$+ 3.15\,\delta - 2.66\,\eta + 1.23\,\pi$.
VIII.	5.	50.	15	$- 2.19\,\delta + 1.40\,\eta - 2.64\,\pi$.
IX.	5.	51.	20	$- 2.03\,\delta + 1.13\,\eta - 1.82\,\pi$.
X.	5.	51.	10	$- 1.85\,\delta + 0.77\,\eta - 1.51\,\pi$.
XI.	5.	51.	13	$- 1.81\,\delta + 0.67\,\eta - 1.41\,\pi$.
XII.	5.	51.	12	$- 1.80\,\delta + 0.58\,\eta - 1.35\,\pi$.
XIII.	5.	51.	7	$- 1.77\,\delta + 0.53\,\eta - 1.31\,\pi$.
XIV.		50.	25	$- 1.75\,\delta + 0.48\,\eta - 1.24\,\pi$.
XV.		50.	26	$- 1.74\,\delta + 0.44\,\eta - 1.22\,\pi$.
XVI.	5.	50.	22	$- 1.73\,\delta + 0.41\,\eta - 1.20\,\pi$.

Conſideranti has expreſſiones facile patet ſex inter medias iuſto plus a reliquis diſſentire, et cum omnes menſurae partium lucidarum pari cum praeciſione inſtitutae eſſe viderentur, mutuus ſex mediarum conſenſus diu me tenuit ſuſpenſum, quibusnam ex his determinationibus maior aſſenſus praebendus ſit, et non niſi poſt varia inſtituta tentamina perſpexi ternas circa finem inſtitutas obſeruationes ad conſenſum cum mediis reduci poſſe demtis a partibus lucidis 27″, vel intermedias idem fere ipſum momentum coniunctionis praebituras, ſi partes lucidae augeantur totidem ſecundis, ſcilicet $\frac{1}{20}$ parte in quas digitus micrometri eſt diuiſus. Reuocatis vero ad calculum initio et fine Eclipſis cum pro coniunctione obtinuiſſem ſimiles expreſſiones iis, quas praebent menſurae mox poſt initium et Eclipſi ad finem vergente inſtitutae, veritati magis conſentaneum eſſe iudicaui ſex inter medias phaſes mulctare 27″; aſt qua ratione factum

ctum ſit, vt idem error in partibus micrometri annotandis toties repetitus fuerit, explicare non valeo. Demtis igitur a ſex intermediis phaſibus 27″ prodibunt pro momento coniunctionis ſequentes expreſſiones.

VIII.	$5^h. 50'. 16'' - 2,19\,\delta + 1.40\,\eta + 2,04\,\pi.$
IX.	$5.\ 50.\ 28 - 2,03\,\delta + 1.13\,\eta - 1,81\,\pi.$
X.	$5.\ 50.\ 22 - 1,85\,\delta + 0.77\,\eta - 1,51\,\pi.$
XI.	$5.\ 50.\ 19 - 1,81\,\delta + 0.67\,\eta - 1,41\,\pi.$
XII.	$5.\ 50.\ 17 - 1,80\,\delta + 0.58\,\eta - 1,35\,\pi.$
XIII.	$5.\ 50.\ 19 - 1,77\,\delta + 0.53\,\eta - 1,31\,\pi.$

Cum δ denotet hic correctionem diſtantiae centrorum Solis et Lunae, atque illa inuoluat non modo correctionem differentiae ſemidiametrorum Lunae et Solis; verum etiam partis lucidae micrometro captae, cumque valor ipſius η ex obſervationibus *a. b. c* et *d* ſatis tuto concludi poſſe videatur, in id praecipue eſt incumbendum vt ex expreſſionibus ſupra relatis eiusmodi obtineatur pro tempore coniunctionis expreſſio, quae libera ſit praeſertim a quantitate δ. Hunc in finem ſi combinentur I. et X. expreſſio fit

$$5^h.\ 50'.\ 11'' + 0,10\,\delta - 0.21\,\eta - 0,72\,\pi.$$

II. et IX. dant

$$5.\ 50.\ 14 + 0,04\,\delta - 0.12\,\eta - 0,72\,\pi.$$

Similem in modum reliquae expreſſiones momenti coniunctionis diuerſimode poſſunt combinari, verum vt omnium ratio habeatur, ſumto medio ſeptem primarum prodit

A.

$$A.\quad 5^h.\ 50'.\ 6'' + 2.58\,\delta - 1.92\,\eta + 0,64\,\pi.$$

et ſumto medio omnium reliquarum reſultat

$$B.\quad 5.\ 50.\ 22 \quad - 1.85\,\delta + 0.71\,\eta - 1,49\,\pi.$$

Hinc vlterius ſumto medio habebimus

$$C.\quad 5.\ 50.\ 14 \quad + 0.36\,\delta - 0.60\,\eta - 0,72\,\pi.$$

Vt vero coëfficiens ipſius δ vlterius diminuatur, ſubtrahatur medium A a medio B, et prodibit

$$16'' - 4,43\,\delta + 2,63\,\eta - 2,13\,\pi = 0$$

cuius pars decima ſexta ad expreſſionem C addita dabit momentum coniunctionis a correctione diſtantiae centrorum fere liberum

$$5^h.\ 50'.\ 15'' - 0,08\,\delta - 0,43\,\eta - 0,73\,\pi$$

quod, niſi η nimis magnum obtineat valorem, paucis minutis ſecundis a viro diſcedere eſt exiſtimandum; nam correctio parallaxeos rariſſime vltra $-1''$ aſcendere eſt deprehenſa.

Pro definienda vero correctione Latitudinis adhibui obſeruationes *a. b. c* et *d* ciria medium Eclipſis $6^h.\ 45'.\ 45''$. captas reducendo illas ad minimam centrorum diſtantiam. Pro reductione vero iſta inſtituenda per parallaxes pro initio et fine computatas orbitam Lunae reduxi ad orbitam apparentem, vnde cognito motu horario in orbita apparente et diſtantia centrorum ex obſeruatione deſumta facili negotio reperitur minima et apparens centrorum diſtantia, quae ducta in coſinum inclinationis orbitae Lunae apparentis praebet Latitudinem apparentem medio Eclipſis reſpondentem, quae collata cum Latitudine apparente e Tabulis deducta dabit correctionem Latitudinis. Calculo hunc in modum peracto prodiit

		Pars lucida	Diſtant. centr.	Minima diſt. centr.
a.	$6^h. 40'. 33''$	$432''$	$494'', 2$	$451'', 2$
b.	6. 43. 9	390	453, 0	441, 2
c.	6. 45. 5	378	440, 1	
d.	6. 47. 37	396,3	453, 5	453, 8.

Media igitur minima centrorum diſtantia $448'', 6$ ducta in coſinum inclinationis orbitae Lunae apparentis ad Eclipticam dabit Latitudinem apparentem $441'', 5$, quae cum ex Tabulis ſit $444'', 8$ correctio Latitudinis Lunae ſit $\eta = -3'', 3$, atque cum obſeruatio *c* medio Eclipſis proxima praebeat $-4'', 7$, eam rotunde ſtatuere licebit $\eta = -4''$ incertitudine exiſtente duorum aut trium circiter minutorum ſecundorum; nam tota correctio ſemidiametri Lunaris adeoque differentiae ſemidiametrorum Solis et Lunae vix duo aut tria minuta ſecunda excedit, parallaxeos vero correctio vt plurimum vltra vnum minutum ſecundum non aſcendit. Poſito igitur $\pi = 0$ et $\eta = -4$ tempus coniunctionis ad meridianum Petropolitanum quam proxime habebitur $5^h. 50'. 16''$. quod vtique paucis tantum minutis ſecundis a vero diſcrepare eſt exiſtimandum.

Praeter obſeruationem Petropoli habitam ad notitiam meam peruenerunt non nullae eiusdem Eclipſis obſeruationes in aliis locis inſtitutae, quas etiam eo magis calculo ſubiicere e ſe eſſe exiſtimaui, quod obſeruatio mea Petropoli habita per eas vel confirmari poſſit vel emendari. Concluſiones ex his calculis deductas ſuccincte tantum ſum expoſiturus.

Petro-

Petropoli	Initium	5^h.	$55'$.	$36''$	Latitudo	59°.	$56'$.	$23''$
	Finis	7.	36.	3				
Oxonie	Initium	4.	5.	38		51.	45.	38
	Finis	5.	41.	50				
Loampithill	Initium	4.	11.	32		51.	28.	40
	Finis	5.	47.	28				
Viennae	Initium	5.	24.	1		48.	12.	36
	Finis	6.	57.	28				
Hafniae	Initium	4.	53.	37		55.	40.	50
	Finis	6.	34.	13				
Pragae	Initium	5.	14.	39		50.	5.	47
	Finis	6.	47.	50				
Mediolani	Initium	5.	2.	32		45.	27.	57
	Finis	6.	33.	23	in certus			
Londini	Initium	4.	11.	2		51.	31.	0

Aſſumtis Elementis tabularibus, qualia ſupra ſunt propoſita calculo parallaxium inſtituto, habita ratione figurae telluris ſphaeroidicae, obtinui.

	Long. ☽ vera	Lat. ☽ Bor.	Parall. Longit.	Parall. Latit.	½ Diam. ☽ app.
Petropol. pro initio	84°.23′.29″	59′.42″,8	33′. 2″,8	46′.44″	16′.51″,2
pro fine	85. 27. 3,6	53. 56 ,5	30. 18 ,6	52. 8	16. 47 ,2
Oxoniae pro initio	84. 33. 49	58. 46 ,5	35. 11 ,6	34. 58 ,2	16. 55 ,3
pro fine	85. 34. 38	53. 14 ,6	39. 31 ,5	41. 22 ,3	16. 51 ,4
Loampithill pro init.	84. 34. 26	58. 43 ,0	35. 53 ,2	35. 4 ,2	16. 55 ,1
pro fine	85. 35. 5	53. 10 ,5	39. 50 ,9	41. 9 ,4	16. 51 ,8
Viennae pro initio	84. 38. 48	58. 19 ,1	42. 16 ,6	37. 12 ,5	16. 51 ,8
pro fine	85. 37. 55	52. 56 ,8	41. 31 ,0	43. 55 ,6	16. 47 ,6
Hafniae pro initio	84. 29. 11	59. 11 ,9	35. 14 ,8	40. 38 ,2	16. 53 ,4
pro fine	85. 32. 47	53. 24 ,7	36. 10 ,3	46. 46 ,5	16. 49 ,5
Pragae pro initio	84. 37. 52	58. 24 ,7	40. 31 ,4	37. 53 ,7	16. 52 ,3
pro fine	85. 36. 28	53. 2 ,9	40. 24 ,6	44. 24 ,4	16. 48 ,3
Mediolan. pro initio	84. 43. 25	57. 54 ,2	43. 24 ,8	33. 34 ,3	16. 52 ,8
pro fine	85. 40. 51	52. 46 ,5	44. 18 ,0	40. 25 ,0	16. 48 ,4
Londini pro initio	84. 34. 16	58. 44 ,0	35. 47 ,6	35. 4 ,7	16. 55 ,2

Poſita iam correctione ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae δ, Latitudinis Lunae vt ante η, porallaxeos π pro tempore coniunctionis reſultabunt ſequentes expreſſiones

Petropoli ex initio	$5^h. 50'.$	$23''$	$+ 1,83\,\delta - 0,73\,\eta - 0,35\,\pi$
ex fine	5. 50	3	$- 1,69\,\delta + 0,09\,\eta - 0,91\,\pi$
Hinc I.		20	$+ 3,52\,\delta - 0,82\,\eta + 0,56\,\pi = 0.$
Oxoniae ex initio	3. 44.	7	$+ 2,46\,\delta - 1,80\,\eta + 0,06\,\pi$
ex fine	3. 43.	50	$- 1,81\,\delta + 0,65\,\eta - 1,59\,\pi$
II.		17	$+ 4,27\,\delta - 2,45\,\eta + 1,65\,\pi = 0.$
Loampith. ex init.	3. 49.	9	$+ 2,43\,\delta - 1,75\,\eta + 0,02\,\pi$
ex fine	3. 49.	1	$- 1,81\,\delta + 0,68\,\eta - 1,54\,\pi$
III.		8	$+ 4,24\,\delta - 2,43\,\eta + 1,46\,\pi = 0.$

Vien-

Viennae ex initio	4.	54.	43	$+ 2{,}20\,\delta - 1{,}42\,\eta - 0{,}31\,\pi$
ex fine	4.	54.	33	$- 1{,}75\,\delta + 0{,}48\,\eta - 1{,}44\,\pi$
IV.			10	$+ 3{,}95\,\delta - 1{,}90\,\eta + 1{,}13\,\pi = 0.$
Haſniae ex initio	4.	39.	30	$+ 2{,}04\,\delta - 1{,}15\,\eta - 0{,}21\,\pi$
ex fine	4.	39.	17	$- 1{,}75\,\delta + 0{,}36\,\eta - 1{,}26\,\pi$
V.			13	$+ 3{,}79\,\delta - 1{,}41\,\eta - 1{,}05\,\pi = 0.$
Pragae ex initio	4.	49.	14	$+ 2{,}16\,\delta - 1{,}32\,\eta - 0{,}28\,\pi$
ex fine	4.	46.	37	$- 1{,}74\,\delta + 0{,}46\,\eta - 1{,}46\,\pi$
VI.		2.	37	$+ 3{,}90\,\delta - 1{,}78\,\eta - 1{,}18\,\pi = 0.$
Mediolani ex initio	4.	26.	4	$+ 2{,}52\,\delta - 1{,}88\,\eta + 0{,}02\,\pi$
ex fine	4.	27.	45	$- 1{,}82\,\delta + 0{,}69\,\eta + 0{,}76\,\pi$
VII.		—	41	$+ 4{,}34\,\delta - 2{,}57\,\eta - 0{,}74\,\pi = 0.$
Londini ex inito	3.	48.	46	$+ 2{,}43\,\delta - 1{,}76\,\eta + 0{,}03\,\pi.$

Perpendenti has aequationes mox patebit aequationem VI et VII minime cum reliquis conſiſtere poſſe; diſſenſus equidem aequationis ab obſeruatione Mediolanenſi petitae facile explicatur per incertitudinem, qua ipſa obſeruatio finis afficitur, Pragenſis vero non aliter cum reliquis conciliari poterit, niſi ſtatuatur initium Eclipſis duobus minutis primis et amplius iuſto tardius eſſe obſeruatum. Abſoluto computo pro Praga non credibile mihi primum viſum eſt, vt tantus error in obſeruationem irrepere potuerit, verum computo ter repetito, cum ad eandem fere ſempér deductus fuerim concluſionem, coactus ſum ſtatuere in ipſis obſeruationibus non exiguum latere errorem, et conferendo momenta coniunctionum ex obſeruatione Pragenſi reſultantia cum momentis ex aliis obſeruationibus deductis patuit initium duobus fere minutis primis cum dimidio iuſto tardis eſſe obſeruatum. Neque minus recte ſe habet finis Berolini obſeruatus $6^h.\ 43'.\ 33''$ pro vt in Novellis publicis relatus eſt: nam tempus coniunctionis ex inde deductum $4^h.\ 44'.\ 44''$ daret Longitudinem illius a meridiano Pari-

Pariſino 46′. 22″ circiter, quae plus quam duobus minutis primis differt a communiter recepta.

Quod ſpectat reliquas quinque aequationes, eae ſi Petropolitanam excipias, ita comparatae ſunt, vt fere pro identicis haberi debeant, atque ob ineuitabiles ipſis obſeruationibus errores inherentes, valores ipſorum δ et η ſufficienti cum certitudine vix detegi poterunt. Et quidem aequatio ex obſeruatione Petropolitana deducta mox indicat, moram Petropoli obſeruatam aliquot ſecundis iuſto eſſe maiorem, nam illi non aliter ſatisfieri poteſt niſi vel ipſi δ tribuendo valorem nimis magnum ſcilicet $-6''$, vel ipſi η affirmatiuum, quorum neutrum admittere licet. Statuamus igitur moram Eclipſis Petropoli obſeruatam peccare in exceſſu 5 minutis ſecundis et errorem hunc ita diſtribuamus, vt initium quatuor minutis ſecundis, tardius, finis vero vno minuto ſecundo citius fuerit annotatus, prodibit pro Petropoli $15 + 3,52\delta - 0,82\eta + 0,56\pi = 0$ quae poſito $\pi = 0$ collata cum II aequatione dat $\delta = -4'',5$, $\eta = -1$. collata cum III praebet $\delta = -6$ et $\eta = -7$, collata cum IV largitur $\delta = -5$ et $\eta = -5$ ac denique combinata cum V praebet $\delta = -5,5$ et $\eta = -5$. Cum vero obſeruationes iſtae, cum quibus Petropolitanam combinauimus, ab exigius erroribus initium praeſertim afficientibus prorſus liberae cenſeri nequeant, tutiſſime acturum me exiſtimo ſi ſtatuam $\delta = -5$ et $\eta = -4$. Facta horum valorum ſubſtitutione momenta pro temporibus coniunctionum ſequentem in modum exprimentur.

Petropoli ex initio	5^h.	50′.	17″
ex fine	5.	50.	11
Medium	5.	50.	14

Oxe-

		Longit. a merid. Petropol.
Oxoniae ex initio	$3^h. 44'. 2''$	$2^h. 6'. 12''$ occ.
ex fine	3. 43. 57	2. 6. 17
Loampithill ex initio	3. 49. 4	2. 1. 10
ex fine	3. 49. 2	2. 1. 12
Viennae ex initio	4. 54. 37	55. 37
ex fine	4. 54. 33	55. 41
Hafniae ex initio	4. 39. 24	1. 10. 50
ex fine	4. 39. 24	1. 10. 50
Pragae ex fine	4. 46. 44	1. 3. 30
Mediolani ex initio	4. 25. 58	1. 24. 16
Londini ex initio	3. 48. 41	2. 1. 33

Longitudines hic repertae tam parum a communiter receptis diſſentiunt, vt diſcrimen earum facillime per defectum ipſarum obſeruationum poſſit explicari.

Conſtituto igitur momento coniunctionis ad meridianum Petropolitanum $5^h. 50'. 14''$ et Longitudine Petropolis a meridiano Grenovicenſi $2^h. 1'. 18''$ reperitur tempus coniunctionis ad meridianum Grenouicenſem $3^h. 48'. 56''$
pro quo cum Longitudo Solis ſit $2^s. 24^\circ. 20'. 25'', 3$
Longitudo vero Lunae 2. 24. 20. 9, 3
ſequitur Tabulas Mayeri exigere correctionem in Longitudinem additiuam $16''$ et in Latitudinem ſubtractiuam $4''$ quam proxime; quodſi differentia meridianorum Grenouicenſis et Petropolitani ponatur $2^b. 1'. 16''$, correctio in Longitudinemduobus ſcrupulis augebitur.

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG
EN L'ANNÉE MDCCLXXXV.

Suivant le nouveau Stile.

Préſenté à l'Académie le 30 *Octobre* 1788.

Je prie le lecteur de relire au premier volume de ces nouveaux Actes, ce que j'y ai dit ſur mes inſtrumens & leur expoſition, ainſi que ſur ma méthode de noter les obſervations & d'en tirer des concluſions.

I. Ba-

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrèmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variat.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour, heure	P. cent.	jour, heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.59	22. 11.m.	27.01	29. 7.m.	158	27.80	28.04[illegible]
Fevrier	28.71	26 au 27.	27.37	10. 10.m.	134	28.04	28.027
Mars	28.68	5. 12.m. 30. 3.m.	27.52	14. 12.m.	116	28.10	28.284
Avril	28.75	17. 6.m.	27.21	10. 10.m.	154	27.98	28.247
Mai	28.48	4. 10.m.	27.67	28. 7.m.	81	28.07	28.086
Juin	28.39	21. 9.m. 25. 10.m.	27.67	11. 9.m.	72	28.03	28.056
Juillet	28.42	14 6.m.	27.66	12. 9.m.	76	28.04	28.034
Août	28.39	27. 12.m. 23. 9.m.	27.84	31. 9.m. 9. s.	55	28.11	28.144
Septembr.	28.58	25. 9.m.	27.46	14. 10.m.	112	28.02	28.026
Octobre	28.59	24. 3.m. 30. 3.m.	27.87	19. 9.m.	72	28.23	28.228
Novembr.	28.93	26. 12.s.	27.41	19. 7.s.	152	28.17	28.251
Decembr.	28.71	11. 11.m.	27.51	6. 5.s.	120	28.11	28.192

m. ſignifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *ſoir* ou *apres-midi*.

La plus grande hauteur du Baromètre a donc été en 1756 de 28.93 pouces, le 26 Novembre à 12 heures minuit. Thermomètre de Deliſle 180. Ciel demi-couvert, calme.

La plus petite hauteur 27.01 pouces, le 29 Janvier à 7 heures du matin. Therm. 150. Vent très fort du NOu. Ciel couvert, neige & pluie.

La variation totale 192 centiemes parties de pouce, & le milieu 27. 97.

La hauteur moyenne, ou bien la ſomme de toutes les hauteurs obſervées, diviſée par leur nombre a été 28. 132, c'eſt à dire $28\frac{132}{1000}$ pouces de Paris, qui ſont préciſement 30 pouces d'Angleterre.

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond au demi-mois.

Mois.	Au deſſus de 27. 80 jours	h.	27. 90 jours	h.	28. 00 jours	h.	28. 10 jours	h.	28. 20 jours	h.	Baromètre, un demi-mois au deſſus de Pouces. mill.
Janvier.	23.	6	18.	21	16.	9	15.	0	12.	21	28. 025
Février	19.	3	16.	21	14.	0	11.	6	9.	3	28. 000
Mars	29.	3	28.	12	26.	21	25.	6	21.	0	28. 338
Avril	25.	3	24.	3	23.	0	21.	12	19.	6	28. 310
Mai	28.	9	23.	18	20.	6	15.	18	10.	3	28. 105
Juin	26.	21	22.	12	19.	15	14.	12	7.	21	28. 069
Juillet	29.	6	26.	9	22.	3	12.	9	3.	15	28. 065
Août	31.	0	29.	6	23.	15	18.	0	15.	0	28. 185
Sept.	22.	15	20.	6	16.	18	13.	18	8.	18	28. 058
Oct.	31.	0	29.	15	27.	9	21.	9	16.	21	28. 220
Nov.	25.	12	23.	12	21.	21	19.	21	17.	0	28. 240
Déc.	27.	3	25.	6	21.	15	18.	21	14.	15	28. 175

D'où l'on conclud que dans l'année 1786, le Baromètre a été:

en 318 jours 9 heures, au deſſus de 27, 80
288 —— 21 —— au deſſus de 27, 90
253 —— 12 —— au deſſus de 28, 00
207 —— 12 —— au deſſus de 28, 10 &
156 —— 3 —— au deſſus de 28, 20 pouces.

&

& par coſéquent dans la demi-année, ou dans 182 jours 12 heures, au deſſus de 28. 129 pouces.

3.) Variations ſubites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour.	Temps heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. 1/100	Differ. 1/100	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Janv.	2.	12. s.	30	28. 55	−78	197	E.	ciel ſerein.
	4.	6. m.	27	27. 77	+58	179	N. fort.	neige : ciel couvert.
	5.	9. m.		28. 35		185	NE.	ciel ſerein.
	26.	3. m.	24	28. 25	−72	158	S. fort.	ciel couvert, neige.
	27.	3. m.		27. 53		150	Ou. ff.	ciel couvert.
	28.	4. s.	15	27. 63	−62	150	NOu. fort.	ciel demi-couv. neige.
	29.	7. m.	32	27. 01	+85	149	NOu. ff.	ciel couv. neige & pluie.
	30.	3. s.	15	27. 86	−46	157	calme	ciel couvert, brouillard.
	31.	6. m.	18	27. 40	+48	158	NE.	ciel couvert, neige.
	31.	12. s.		27. 88		164	N.	ciel couvert.
Févr.	12.	12. s.	24	27. 95	+48	166	calme	ciel couvert, neige.
	13.	12. s.		28. 43		171	NOu.	ciel demi-couvert.
	14.	12. m.	24	28. 53	−113	165	SE. ff.	ciel couvert, neige.
	15.	12. m.		27. 40		149	SOu. fort.	ciel couv. beaucoup de neige
	16.	6. m.	30	27. 57	+62	151	N. fort.	ciel couv. beaucoup de neige
	17.	12. m.	33	28. 19	−82	169	N.	ciel ſerein.
	18.	9. s.	27	27. 38	+54	161	S. ff.	c. couv. beaucoup de neige.
	19.	12. s.		27. 92		180	NOu. fort.	ciel demi-ſerein.
	20.	12. m.	48	27. 93	+72	171	NOu.	ciel demi-ſerein.
	22.	12. m.		28. 65		170	N. fort.	ciel ſerein.
Mars.	30.	4. m.	20	28. 68	−41	150	SE.	brouill. c. ſerein, puis couv.
	30.	12. s.		28. 27		152	NOu.	c. ſerein.

Mois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{12}$	Differ. $\frac{1}{12}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
	6.	12. s.	24	28. 00	−43	152	calme.	brouill. c. ſerein, puis couv.
	7.	12. s.		27. 57		148	Ou.	ciel ſerein.
Avril	10.	10. m.	20	27. 21	+79	148	SE. fort.	c. couv. beauc. de pluie, puis
	11.	6. m.	54	28. 00	+72	159	SOu. fort.	c. ſerein. (neige.
	13.	12. m.		28. [illegible]		14	NOu.	brouillard, & puis c. ſerein.
	11.	9. m.	24	28. 07	−42	126	E.	ciel couvert.
Juill.	12.	9. m.	45	27. 65	+77	128	NE.	beaucoup de pluie, c. couv.
	14.	6. m.		28. 42		131	Ou.	ciel ſerein.
Août	4.	9. m.	24	27. 88	+44	120	E. fort.	c. ſerein. puis couv. orage & pl.
	5.	9. m.		28. 32		125	E.	brouillard. c. demi-couv. pl.
	17.	12. s.	24	28. 00	−45	136	S. fort.	pluie, ciel couvert.
Sept.	18.	12. s.	48	27. 55	+75	138	SOu.	pluie, ciel couvert.
	0.	12. s.		28. 30		140	N.	ciel ſerein.
	4.	3. m.	36	28. 59	−66	152	Ou. ff.	ciel demi-couvert.
	25.	3. s.		27. 93		142	Ou. ff.	c. couv. beauc. de pluie, grele.
Oct.	29.	3. m.	24	28. 15	+44	152	E.	brouill. c. couvert, puis neige.
	30.	3. m.		28. 50		149	NOu. fort.	c. couv. un peu de pluie.
	1.	9. s.	27	28. 60	−60	164	N.	ciel ſerein.
	2.	12. s.		28. 00		152	Ou. fort.	ciel couvert, puis neige.
	4.	6. m.		27. 71		159	N.	ciel couvert, neige.
	4.	12. s.	24	27. 95	+65	166	NOu. fort.	ciel ſerein.
Nov.	5.	12. s.		28. 60		170	NOu.	c. ſerein. Debacle de la Neva.
	6.	10. m.	38	28. 70	−68	165	Ou.	c. demi-couvert puis neige.
	7.	12. s.		28. 02		158	E. fort.	ciel demi-couvert.
	9.	9. m.	24	28. 25	−48	163	SOu. fort.	ciel couvert.
	10.	9. m.		27. 77		153	NOu.	neige, ciel couvert.

Mois

Mois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{10}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
	11.	6. m.		27.	53		151	Ou. ff.	beaucoup de neige, c. couv.
	12.	6. m.	36	27.	82	+63	169	NOu. fort.	ciel demi-couvert.
	13.	6. s.	12	28.	45	—33	167	N.	ciel ſerein.
	14.	6. m.		28.	12		154	Ou. ff.	beauc. de neige, c. couvert.
Nov.	15.	6. m.	18	28.	18	—39	150	Ou. ff.	neige, ciel couvert.
	15.	12. s.		27.	79		160	N. fort.	ciel couvert.
	18.	12. m.	30	28.	30	—89	171	E.	ciel demi-couvert.
	19.	6. s.	30	27.	41	+64	152	S.	ciel couvert.
	20.	12. s.	24	28.	05	+45	170	calme.	c. demi-couv. brouillard.
	21.	12. s.		28.	50		164	calme.	ciel couvert.
	9.	3. m.	27	27.	77	+58	150	N.	ciel couv. puis neige.
	10.	6. m.	29	28.	35	+36	162	NE.	c. demi-couv. puis neige.
	11.	11. m.		28.	71		178	E.	brouillard, ciel couvert.
Déc.	26.	12. s.	54	28.	48	—81	155	SE. fort.	ciel couvert, puis ſerein.
	29.	6. m.		27.	67		155	SE.	ciel couv. puis neige.
	29.	3. s.	30	27.	67	+75	151	SOu.	c. demi-couvert, puis neige.
	30.	9. s.		28.	42		171	calme.	brouillard, c. demi-couvert.

Les deſcentes ſont marquées par — & les montées par +.
ff. ſignifie un vent très fort.

La plus forte deſcente eſt donc de 1, 13 pouces en 24 heures, le 14 Février : & les plus fortes montées ſont de 0, 79 pouces en 20 heures, le 10 Avril, & de 0, 85 pouces en 32 heures le 29 Janvier. Le mois de Novembre a été le plus variable, & après lui les mois de Janvier & de Février.

II. Ther-

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, leur différence, & état moyen, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Hauteurs extrêmes. Au plus bas Degré.	jour	heure.	Au plus haut Degré.	jour	heure.	Différence. Degré	État moyen. Froid moyen. Degré.	Chaleur moyen. Degré.
Janvier	202	2.	8. m.	148	le 13. 17. 18 19.	à 2 h. s.	54	168,0	161,7
Février	193	27.	8. m.	149	le 8. 9. 15	à 2. heur. s.	44	170,6	161,2
Mars	193	3.	7. m.	132	29.	2. s.	61	167,6	154,5
Avril	159	11.	6. m.	122	21.	2. s.	37	152,4	136,2
Mai	154	4.	6. m.	116	17.	2. s.	38	143,8	130,6
Juin	146	2.	7. m.	107	27.	2. s.	39	134,9	123,9
Juillet	134	8.	6. m.	108	25.	2. s.	26	128,6	117,1
Août	137	31.	6. m.	109	1.	2. s.	28	130,1	117,[illegible]
Sept.	151	25. 26.	6. m.	118	5.	2. s.	33	138,9	127,2
Octobr.	162	27.	6. m.	128	10.	2. s.	34	149,7	142,0
Novem.	184	17.	9. m.	149	3.	2. s.	35	168,1	159,7
Décem.	187	23.	10. s.	146	8.	9. m.	41	166,8	160,7

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Déliſle.

Mois.	Froid plus grand que								Chaleur plus grande que						
	200 jours,	190 jours	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	130 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.	170 jours.
Janv.	1	4	7	11	19	29	31	31					10	18	22
Févr.		1	5	16	22	28	28	28					3	12	24
Mars		2	8	13	19	28	31	31				3	11	20	28
Avril						25	30	30			6	22	30	30	30
Mai						8	21	31		4	14	26	31	31	31
Juin							5	24	3	11	22	30	30	30	30
Juillet								12	2	21	31	31	31	31	31
Août								16	1	24	31	31	31	31	31
Sept.						2	8	30		1	21	30	30	30	30
Oct.					1	17	31	31			2	12	28	31	31
Nov.			4	13	24	30	30	30					1	15	28
Déc.			4	15	21	28	31	31					4	17	22
1786.	1	7	28	68	106	195	246	335	6	61	127	185	240	296	338

3.) Le Froid a été 1 jour plus grand que 200°, le 2 Janvier. Il a été obſervé entre:

190 & 200	le 1. 3. 6. Janvier, le 27 Février, & le 3. 5 Mars - - - - -	jours 6
180 & 190	le 4. 5. 7 Janv. le 20. 22. 25. 26. Févr. le 2. 4. 6. 10. 18. 19 Mars, le 16. 17. 25. 27 Novembre & le 16. 17. 19. 23 Déc.	21
170 & 180	le 8. 9. 10. 23 Janvier, le 1 — 4. 13. 14. 17. 19. 21. 24. 28 Févr. le 1. 7. 11. 17. 20. Mars, le 6. 8. 12. 13. 18. 20.	

	24. 26. 28 Novembre, & le 11 — 15. 18. 20 — 22. 24. 30 Décembre. - -	jours 40
160 & 170	le 11. 12. 14. 15. 22. 24. 25. 31 Janvier le 5. 6. 12. 16. 18. 23 Févr. le 8. 9. 12. 15. 16. 21. Mars, le 27 Octobre le 1. 2. 4. 5. 9. 11. 19. 21 — 23. 29 Nov. & le 1. 9. 10. 27. 28. 31 Déc.	38
150 & 160	le 13. 16. 17. 19. 20. 21. 26. 28 — 30 Janv. le 7 — 11. 15 Février, le 13. 14. 22 — 26. 30. 31 Mars, le 1 — 8. 10 — 20. 23 — 25. 27. 28. 30 Avril, le 1 — 6. 10. 11. Mai, le 25. 26 Septembre, le 5 — 8. 16. 18. 20 — 26. 28. 29. 31. Octobre, le 3. 7. 10. 14. 15. 30. Novembre, & le 2 — 5. 25. 26. 29 Dec.	89

Il a donc gélé en 195 jours: par conſequent il y a eu dans toute l'année 170 jours entiérement exempts de gelée.

Enſuite la dérniere gélée a été le 11 Mai, & il a recommencé à géler le 25 Septembre: ainſi après un intervalle de 136 jours d'eté.

4.) La chaleur a été en 6 jours plus grande que 110 degrés: le 27. 28. 29 Juin, le 25. 31 Juillet, & le 1 Août. Elle a été obſervée entre:

120 & 110	le 14. 15. 17. 18 Mai, le 19. 20. 22 — 26. 30 Juin, le 1. 5. 7. 9. 11. 15 — 20. 22 — 24. 26 — 30. Juillet, le 2 — 16. 21 — 23. 25 — 29. Août, & le 5 Sept.	jours 55

130

130 & 120	le 18. 21. 23. 25 — 27. Avril, le 12. 13. 16. 20. 22 — 24. 27. 28. 30 Mai, le 6 — 9. 12. 13. 15 — 18. 21 Juin, le 2 — 4. 6. 8. 10. 12 — 14. 21. Juillet. le 17 — 20. 24. 30. 31 Août, le 1 — 4. 6 — 17. 19. 21 — 23 Septembre, & le 10. 13. Octobre. - - - -	jours 66
140 & 130	le 28 — 30 Mars, le 2. 3. 5 — 8. 13 — 17. 19. 20. 22. 24. 28. Avril, le 5 — 11. 19. 21. 25. 26. 29 Mai, le 1 — 5. 10. 11. 14 Juin, le 18. 20. 24 — 30 Sept. & le 1 — 4. 7. 9. 11. 12. 14. 15. Octobre. - - - - -	58
150 & 140	le 12 — 14. 17 — 19. 26 — 29 Janvier, le 8. 9. 15. Février, le 20. 21. 23 — 27. 31 Mars, le 1. 4. 9 — 12. 29. 30 Avril. le 1 — 4. 31 Mai, le 5. 6. 8. 16 — 25. 29 — 31. Octobre, le 3 Novembre, & le 5 — 8. Décembre. - - -	56

Il a donc dégélé en 240 jours: par conſéquent il y a eu dans toute l'année 125 jours de gélée continuelle.

Les autres concluſions que les deux premiers tableaux des obſervations thermométriques fourniſſent, ſont:

Le froid le plus grand, 202 degrés ſuivant la graduation de Déliſle, le 2 Janvier à 8 heures du matin. Baromètre 28. 54. Vent du Nord & ciel ſerein.

La chaleur la plus grande, 107 degrés, le 27 Juin à 2 heures après midi. Baromètre 28. 22. Calme & ciel ſerein.

La différence entre ces deux termes extrèmes eſt 95 degrés de Délisle, qui font 50¾ degrés de Reaumur.

Le froid moyen: c'eſt à dire, la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques obſervées au matin & au ſoir, diviſée par leur nombre, eſt:

pour toute l'année 151½ degrés,
pour les ſix mois d'hyver, Janvier, Février, Mars, Avril, Novembre & Décembre, 165¼ degrés, &
pour les ſix mois d'été Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre & Octobre 137¾ degrés, après la graduation de Délisle.

De même la chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques obſervées à 2 heures après midi, diviſée par leur nombre, ſe trouve:

pour toute l'année 141 degrés,
pour les ſix mois d'hyver indiqués ci-deſſus 155 degrés, &
pour les ſix mois d'été 126½ degrés de Delisle.

Parmi les 195 jours de gélée, il y avoient:

106,	où le froid a ſurpaſſé			160
68	-	-	-	170
28	-	-	-	180
7	-	-	-	190 &
1	-	-	-	200 degrés.

Enſuite parmi les 240 jours de dégel, il y avoient:

185,	où la chaleur a ſurpaſſé				140
127	-	-	-	-	130
61	-	-	-	-	120 &
6	-	-	-	-	110 degrés.

III.

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Eſt.	SE.	Sud.	SOu.	Oueſt.	NOu.	Variable.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	4	18	6	3	4	2	4	6	4	1	4	6	
Févr.	4	13	8	3	9	1	1	4	5	2	1	5	
Mars	4	21	6	0	4	3	9	4	4	2	2	2	1
Avril	11	14	5	0	1	2	4	0	1	6	0	12	4
Mai	7	13	9	2	3	2	4	2	2	1	5	5	7
Juin	9	12	7	2	2	5	3	3	3	2	5	5	2
Juillet	13	12	6	0	1	2	11	2	2	1	7	2	3
Août	6	14	11	0	0	8	14	4	0	1	3	1	
Sept.	4	16	10	0	0	4	4	2	10	4	0	5	1
Oct.	2	17	9	3	6	7	2	2	5	3	3	3	
Nov.	7	13	7	3	4	5	4	1	1	3	6	6	
Déc.	5	11	15	0	2	3	4	8	2	6	3	3	
Année 1786.	76	174	99	16	36	44	64	38	39	32	39	55	18

2.) Direction des vents forts.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours
Nord.	le 3. 16. 19. 21 Fevrier, le 31 Mai, le 14. Juin & le 27 Octobre. - - -	7
NE.	le 11. 16. 20 Juin, le 7. 15. 17. 18 Août, le 20. 28. 29 Sept. & le 1. 2 Octobre.	12

2.) Direction des Vents forts.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours.
Eſt.	le 3 Janvier, le 1. 26. 27 Mars, le 24 Juin, le 1. 3. 4. 16 Août, le 27 Septembre, le 8 Nov. & le 20 Décembre. - - -	12
SE.	le 15 Janvier, le 30 Mars, le 14 Mai, le 15 Juin, le 8 Juillet, le 29 Août, le 17 Sept. & le 14. 15. 16. 17. 27 Décembre. -	12
Sud.	le 26 Janvier, le 14. 15. 18 Février, le 18 Mai, le 28 Juillet, le 10. 16. 18 Sept. le 13 Octobre, & le 6 Décembre. - -	11
SOu.	le 13 Janvier, le 5. 6 Février, le 15 Mars, le 10. 11. 14. 15. 30 Avril, le 19 Mai, le 22. 23 Septembre, le 10. 18 Octobre, le 7. 15 Novembre, & le 4. 5. 7. 8. 24. 31 Décembre. - - - - -	22
Oueſt.	le 14. 21. 27 Janvier, le 16 Mars, le 21. 25. 26. 27 Mai, le 10 Juin, le 2. 3. 10. 13 Juillet, le 24 Août, le 17. 24. 25 Octobre, le 2. 6. 9. 11. 14. Novembre, & le 25 Décembre. - - - - - -	23
NOu.	le 28. 29 Janvier, le 23. 28 Février, le 7. 22. 29 Mai, le 2. 3 Juin, le 2 Août, le 26. 30. 31 Octobre, le 5. 12 Novembre & le 26 Décembre. - - - - -	16

Parmi

Direction	Parmi ces vents ſe trouvoient être les plus violens, ceux	Nombre de jours.
NE.	du 11. & 20 Juin. - - - - - - -	2
Eſt.	du 3 Janvier. - - - - - - - - -	1
Sud.	du 26 Janvier, & du 14. 15. 18 Février. -	4
SOu.	du 15 Novembre. - - - - - - -	1
Oueſt.	du 25 Mai, du 24. 25 Octobre & du 11. 14 Novembre. - - - - - - -	5
NOu.	du 29 Janvier, du 29 Mai & du 26 Octobre.	3

Les mois les plus venteux ont été, ſelon l'ordre de leur intenſites: Février, Janvier, Novembre & Décembre, dans le rapport de 307 : 297 : 283 : 281.

Les mois les moins venteux, ou les plus calmes: Avril, Juillet, Août & Septembre; dans le rapport de 196 : 197 : 251 : 253.

Le vent dominant a été celui de l'Eſt, qui ſurtout a regné en Août & Juillet. Le rapport des quatre plages ſe trouve: Nord, Eſt, Sud, Oueſt.
90 : 110 : 78 : 87.

IV.

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel. ſerein jours.	Ciel. couvert jours	Brouillard jours.	Pluie. forte jours.	Pluie. petite jours.	Neige. copieuſe jours.	Neige. petite jours.
Janv.	3	23	2		3		20
Févr.	9	13	2			3	11
Mars	11	12	4			2	7
Avril	19	4	6	3	2		2
Mai	8	5	4	3	13		2
Juin	11	5	4	5	9		
Juillet	8	5	1	7	11		
Août	13	2	5	8	7		
Sept.	7	8	3	5	13		
Oct.	2	11	5	1	8		9
Nov.	7	16	6			4	7
Déc.	7	15	3		2		14
Année 1786.	105	119	45	32 (100)	68	9 (81)	72

Il gréla le 21 Mars, le 2 Septembre & le 25 Octobre.

Il neigea pour la derniere fois le 2 Mai & il recommença à neiger le 5 Octobre, après un intervalle de 156 jours.

Il y eut 7 orages complets, le 29 Juin, le 26 Juillet, le 1. 4. 10 & 12 Août & le 2 Septembre; ceux du 10 & 12 Août ont été les plus forts. Il tonna de loin le 12 Mai, le 16. 28 Juin, le 2. 6. 23 Juillet, & le 5. 7 Septembre. Des éclairs de nuit furent obſervés le 30 Juillet, le 16 Août & le 13 Octobre.

Le

Le nombre des Aurores boréales fut 40, dont 23 des plus conſiderables furent obſervées le 3 Février, le 2. 4. 19. 20. 29. 30. 31 Mars, le 1. 2. 12. 18. 22. 26 Avril, le 2 Mai, le 22. 25 Août, le 8. 17 Septembre, le 1. 20 Octobre & le 12. 16 Novembre, parmi lesquels ceux du 29 Mars, du 18 & 22 Avril étoient les plus brillantes, & dardoient pluſieurs jets colores. Les autres 17 moins conſidérables furent remarquées le 27. 28 Février, le 1. 3. 11. 16. 18 Mars, le 21 27 Avril, le 18 Août, le 14 Septembre, le 2. 13. 25 Octobre, le 20 Novembre & le 13. 15 Décembre.

Un Parhélie d'une lumiere fort vive fut apperçu le 16 Septembre.

La Neva débacla le 21 Avril après midi, après avoir été couverte de glaces pendant 134 jours: cependant le paſſage ne fut entièrement libre que le lendemain 22 Avril avant midi. Baromètre 28. 57 à 28. 32 pouces, thermomètre de Delisle 122 à 148, temps calme & ciel entiérement ſerein. Les glaces du Ladoga parurent le 2 May: la riviere les charia jusqu'au 18 de ce mois, & très copieuſement jusqu'au 11.

Le 5 Novembre reparurent les premieres glaces, & déja le lendemain 6, la Neva ſe trouva priſe par un froid de 172 degres de Délisle. Baromètre 28. 70, temps calme & ciel ſerein. L'Intervalle entre le debacle & la priſe de la riviere n'a donc été que de 187 jours.

Supplement.

Pour pouvoir juger en quoi les obſervations faites en chaque année s'écartent de l'état météorologique moyen, j'ai pris des milieux entre les réſultats des mes obſervations faites jusqu'ici pendant une ſuite non-interrompue de 14 années, & j'en ai tiré les concluſions ſuivantes.

I. Baromètre

La plus grande hauteur du Baromètre s'obſerve ordinairement en Decembre: ſa moyenne valeur eſt de 28. 869 pouces de Paris.

Sa plus petite hauteur s'obſerve communément en Janvier, & ſa moyenne valeur ſe trouve être de 26. 990.

Donc la variation totale = 1, 879 & le milieu = 28,929.

La hauteur moyenne de 14 années = 28. 033, ou $28\frac{1}{30}$ pouces.

La hauteur du Baromètre ſe trouve en 202 jours de l'année au deſſus de 28 pouces de Paris.

II. Thermomètre

Le plus grand froid a lieu communément en Janvier, & ſa moyenne valeur eſt de 196°, 1; ſuivant la graduation de Déliſle.

La plus grande chaleur eſt obſervée le plus ſouvent en Juillet, & ſa moyenne valeur eſt de 106°, 7 de Déliſle.

Ainſi

Ainſi la différence entre ces deux temperatures extrêmes = 89°, 4.

Le Froid moyen de la nuit: pour toute l'année - 149°, 2.

pour les ſix mois d'hyver Janv. Févr. Mars, Avr. Novembr. Decembr. - - - - 162°.

& pour les ſix mois d'été Mai, Juin, Juil. Août. Sept. Octobr. - - - - - 136.

La Chaleur moyenne de l'après midi: pour toute l'année - - - - - - 140°, 6.

pour les ſix mois d'hyver - - - - 154.

pour les ſix mois d'été. - - - - - 127.

Le Froid de la nuit eſt en, 53 jours plus grand que 170$^{d.}$
en 179 jours plus grand que 150 &
en 321 jours plus grand que 130 degrés.

Enſuite la Chaleur de l'après midi eſt,
en 121 jours plus grande que 130.
& en 253 jours plus grande que 150.

Le terme moyen de la premiere gélée tombe au 9 Octobre; celui de la derniere gélée au 3 Mai. L'Intervalle entre ces deux époques eſt de 206 jours: par conſéquent celui entre la derniere & la premiere gélée de 159 jours: le premier intervalle peut être nommé la longueur de l'hyver, & le dernier, celle de l'été.

En prenant un milieu entre toutes les annotations faites depuis 1718, telles qu'on les trouve inſérées dans nos

Calendriers, le terme moyen de la débacle de la riviere tombe au 19 Avril & celui de la priſe au 27 Novembre, ſuivant le nouveau ſtile. Ainſi l'intervalle moyen entre la debacle & la repriſe eſt en été de 222 jours, & celui entre la priſe & la debacle, en hyver de 143 jours: c'eſt à dire, la riviere reſte priſe en 143 jours & on la traverſe en bateaux en 222 jours.

III. Vent

Le nombre moyen des jours calmes, ou ſans vent eſt, pour les 6 mois d'hyver 28, & pour les ſix mois d'été 41; ainſi dans l'année entiere 69.

Le nombre moyen des jours de petit vent eſt, pour les 6 mois d'hyver 87, & pour les 6 mois d'été 75: ainſi dans toute l'année 162.

Le nombre moyen des jours de vent fort eſt, pour les ſix mois d'hyver 50, & pour les ſix mois d'été 53: en tout 103 dans l'année.

Le nombre moyen des jours de vent très-fort eſt pour, les ſix mois d'hyver auſſi bien que pour ceux de l'eté, 16: ainſi dans l'année entiere 32. Il n'y a donc presque point de différence entre l'été & l'hyver, quant à la force des vents.

Pour la Direction des vents, j'ai trouvé en prenant un milieu entre toutes mes obſervations de 14 années:

Dire-

Direction.	Nombre moyen des jours pour les 6 mois d'été.	pour les 6 mois d'hyver.	pour toute l'année.
Nord	32	14	46
NE	15	19	34
Eſt	19	23	42
SE	18	12	30
Sud.	22	20	42
SOu.	24	22	46
Oueſt	27	45	72
NOu	27	26	53

Le rapport des quatre plages:

	Nord	Eſt	Sud	Oueſt
pour l'été - -	53 :	36 :	43 :	52
pour l'hyver - -	37 :	39 :	37 :	69
pour toute l'année	90 :	75 :	80 :	121

IV. Atmoſphère

	Nombre moyen des jours pour les 6 mois d'été.	pour les 6 mois d'hyver.	pour toute l'année.
Ciel ſerein	39	53	92
Ciel demi-couvert	68	87	155
Ciel couvert	74	44	118
Brouillard	26	17	43
Pluie	20	80	100
Neige	64	6	70

Les 6 mois d'été ont 184 & les 6 mois d'hyver 181 à 182 jours; ſuivant que l'année eſt commune ou biſſextile.

Les termes moyens de la premiere & de la derniere neige tombent aux mêmes jours, que ceux de la premiere & de la derniere gélée.

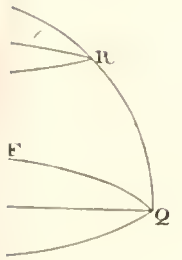
La moyenne hauteur de l'eau de pluie & de neige fondue tombée eſt, dans les ſix mois d'été 10, 96 pouces
dans les ſix mois d'hyver 4, 97 ——
dans l'année entiere - - 15, 93 ——

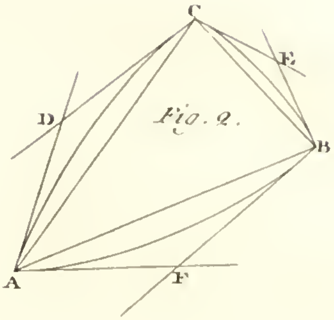
Le nombre moyen des Orages eſt 11 à 12.

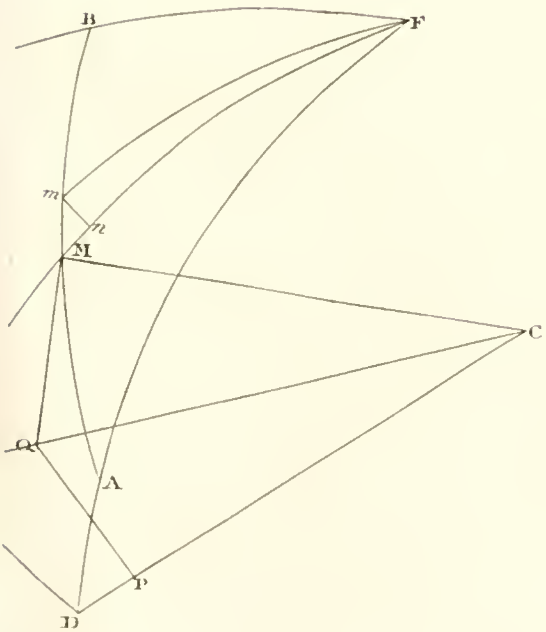
Le nombre moyen des Aurores boréales, pour l'hyver 16 à 17 & pour l'été 8 à 9: ainſi pour toute l'annee 24 à 26. Il ne gréle que 2 à 3 fois par année.

Je me propoſe de rectifier toutes ces concluſions, à méſure que le nombre des années, où j'ai obſervé, aura accru.

Hiſtoire de l'Académie Imperiale des Sciences Année 1785
Planche







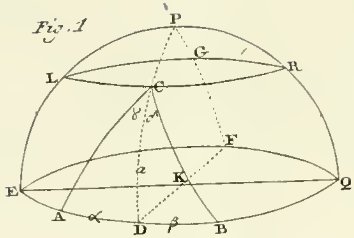


Fig. 1

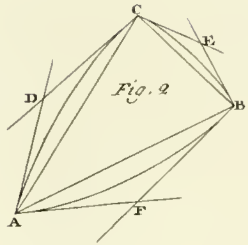


Fig. 2

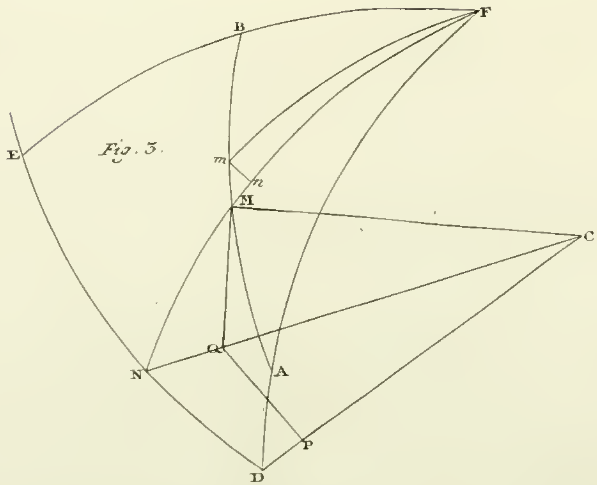


Fig. 3.

Fig. 2.

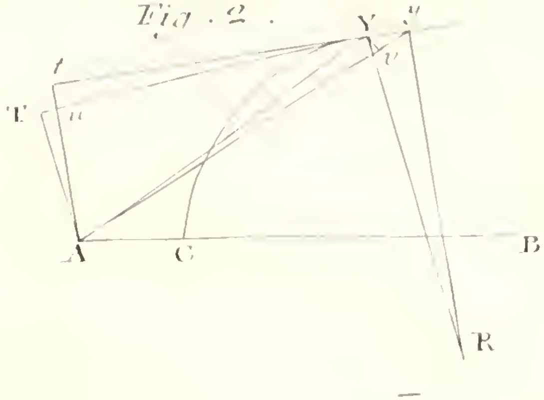


Fig. 4.

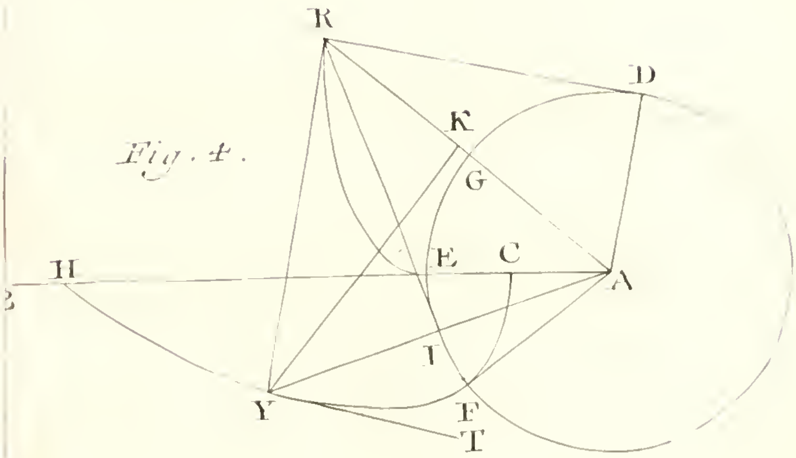


Fig. 6.

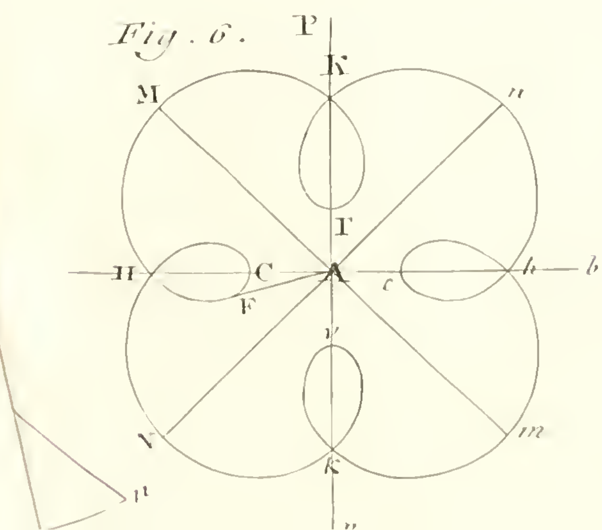


Fig. 1.

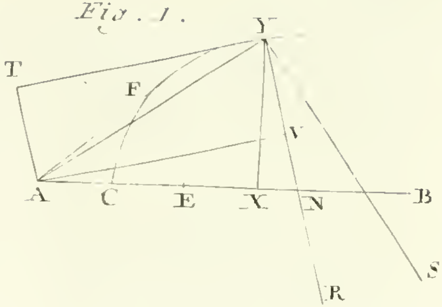


Fig. 2.

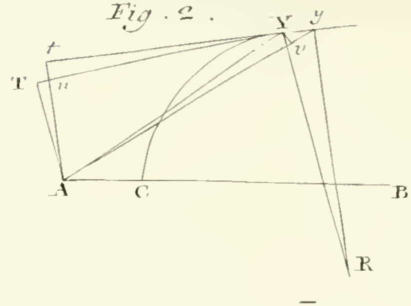


Fig. 3.

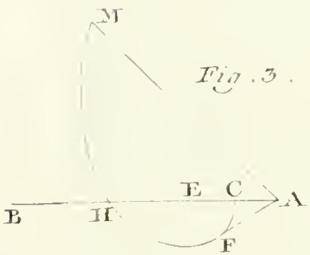


Fig. 4.

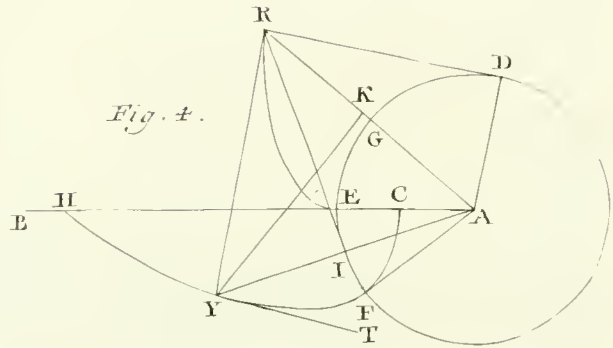


Fig. 5.

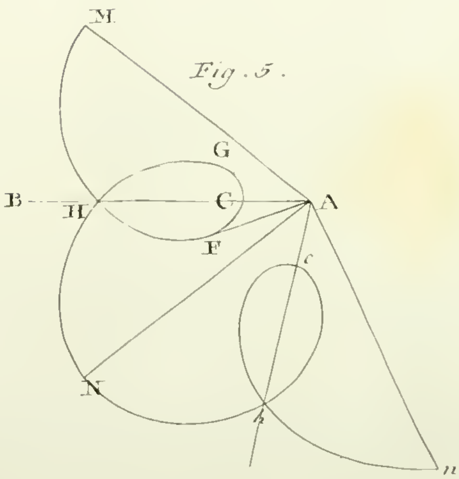


Fig. 6.

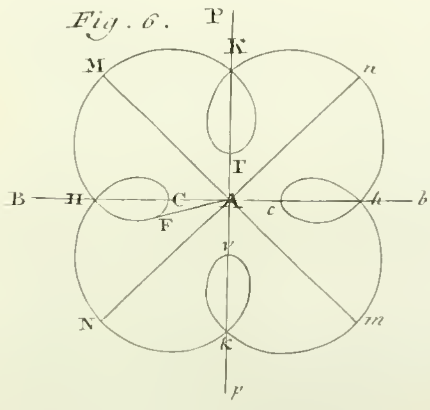


Fig. 5.

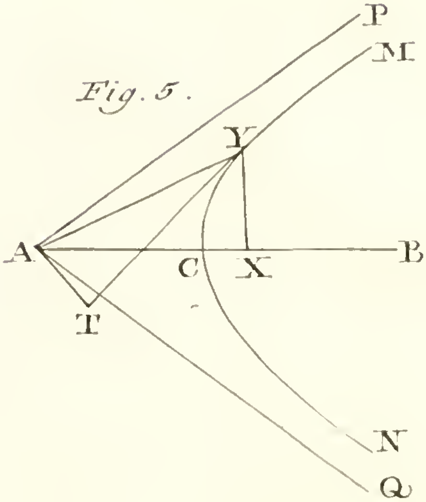


Fig. 4.

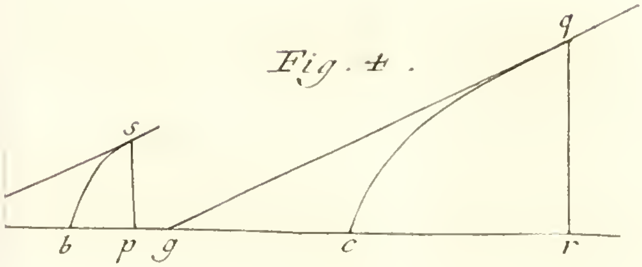
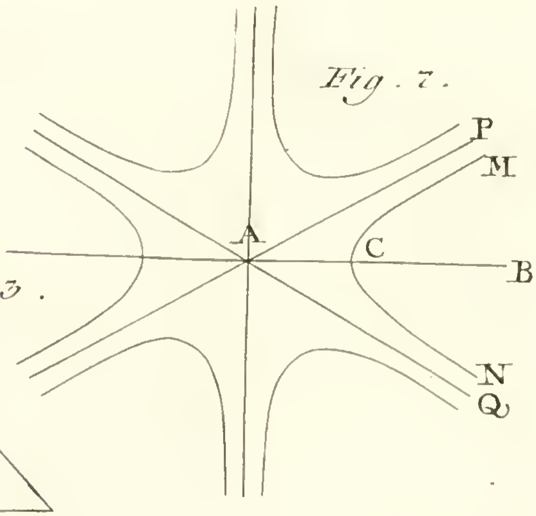


Fig. 7.



ig. 3.

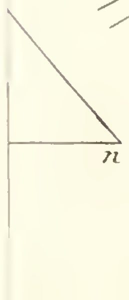


Fig. 1.

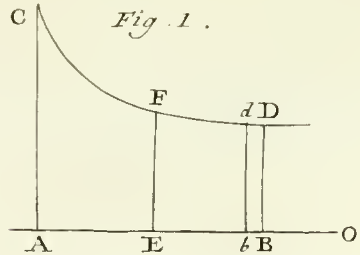


Fig. 5.

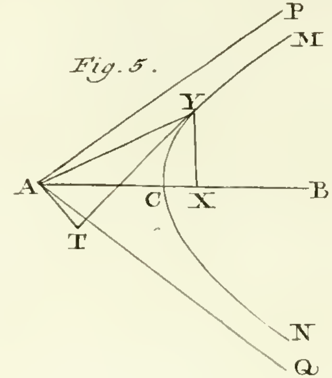


Fig. 6.

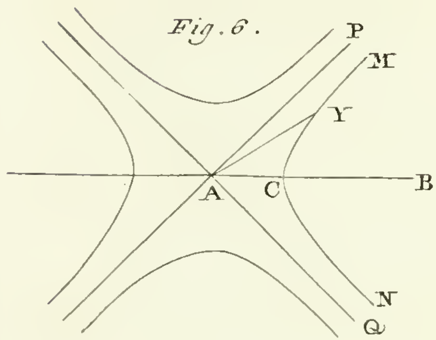


Fig. 4.

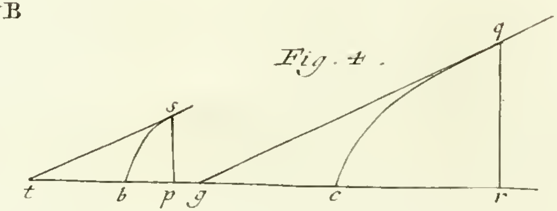


Fig. 2.

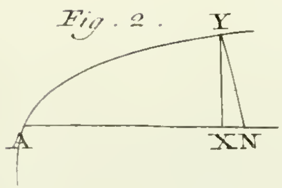


Fig. 3.

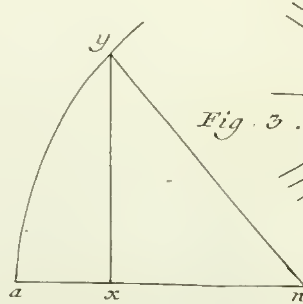


Fig. 7.

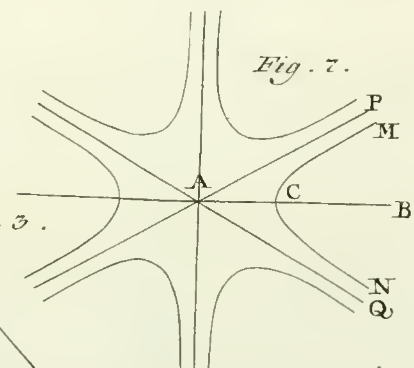




Fig. 3.

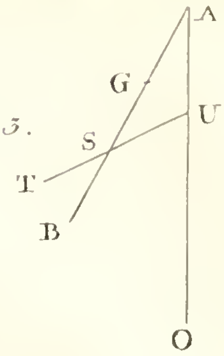
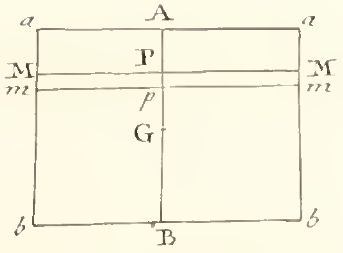


Fig. 5.



g. 6.

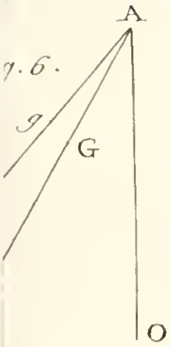
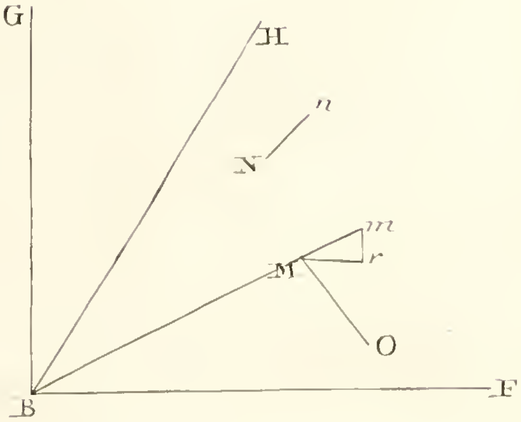


Fig. 8.



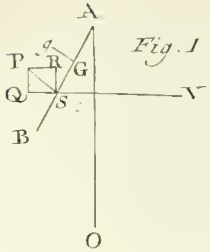


Fig. 1.

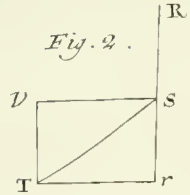


Fig. 2.

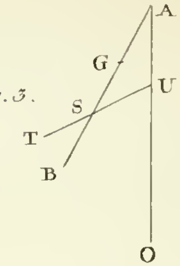


Fig. 3.

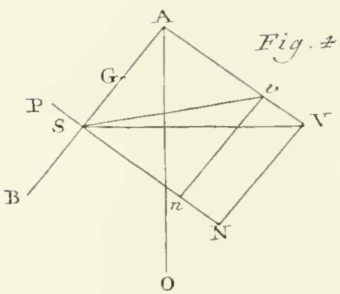


Fig. 4.

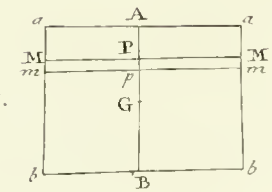


Fig. 5.

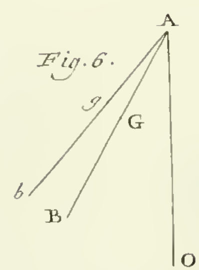


Fig. 6.

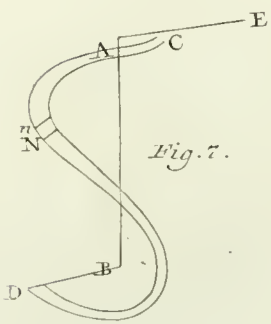


Fig. 7.

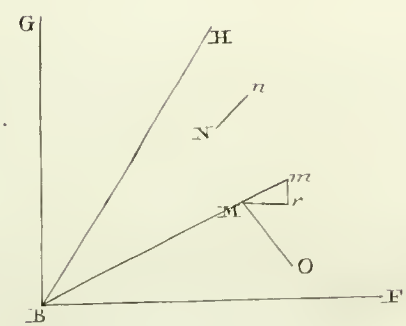
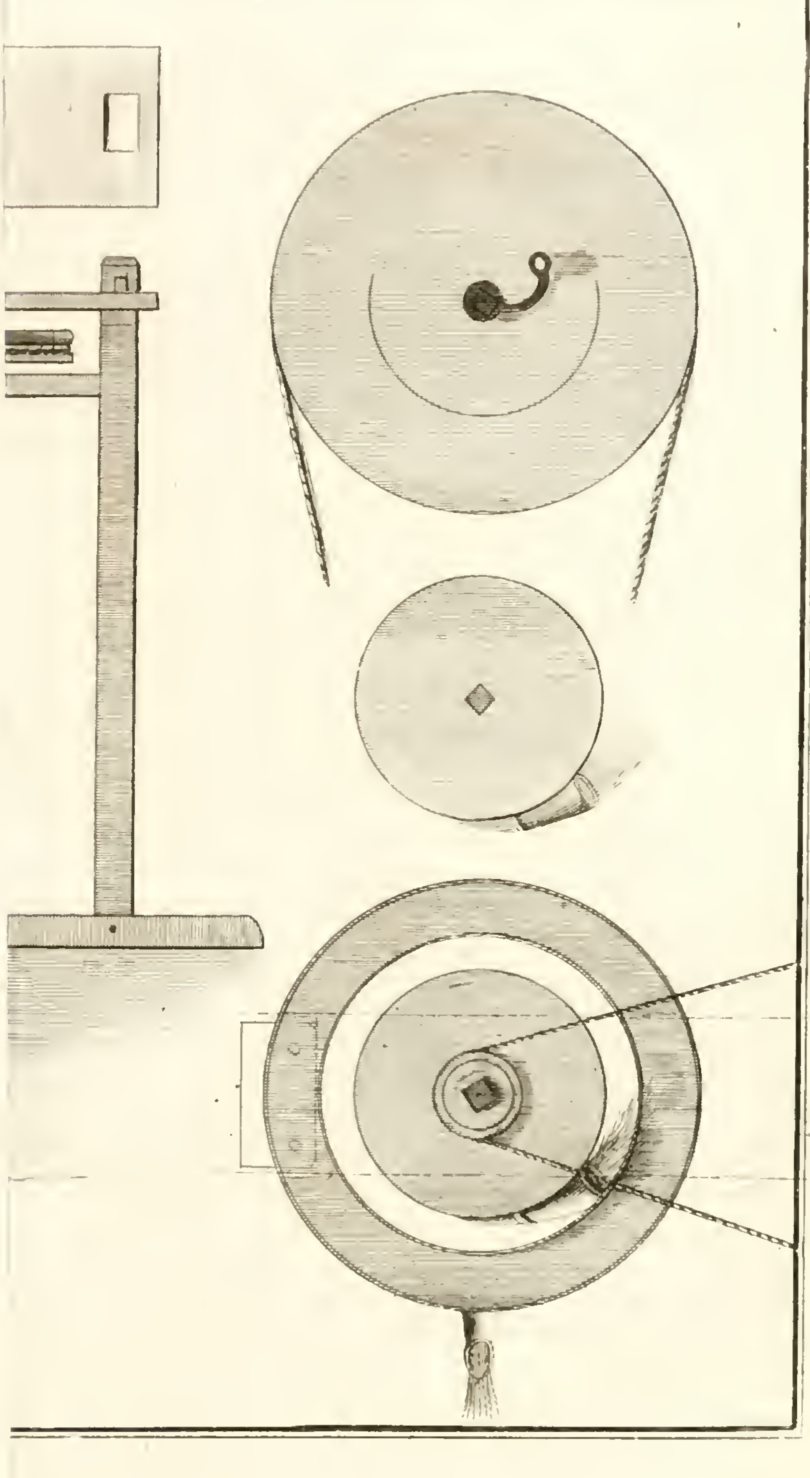
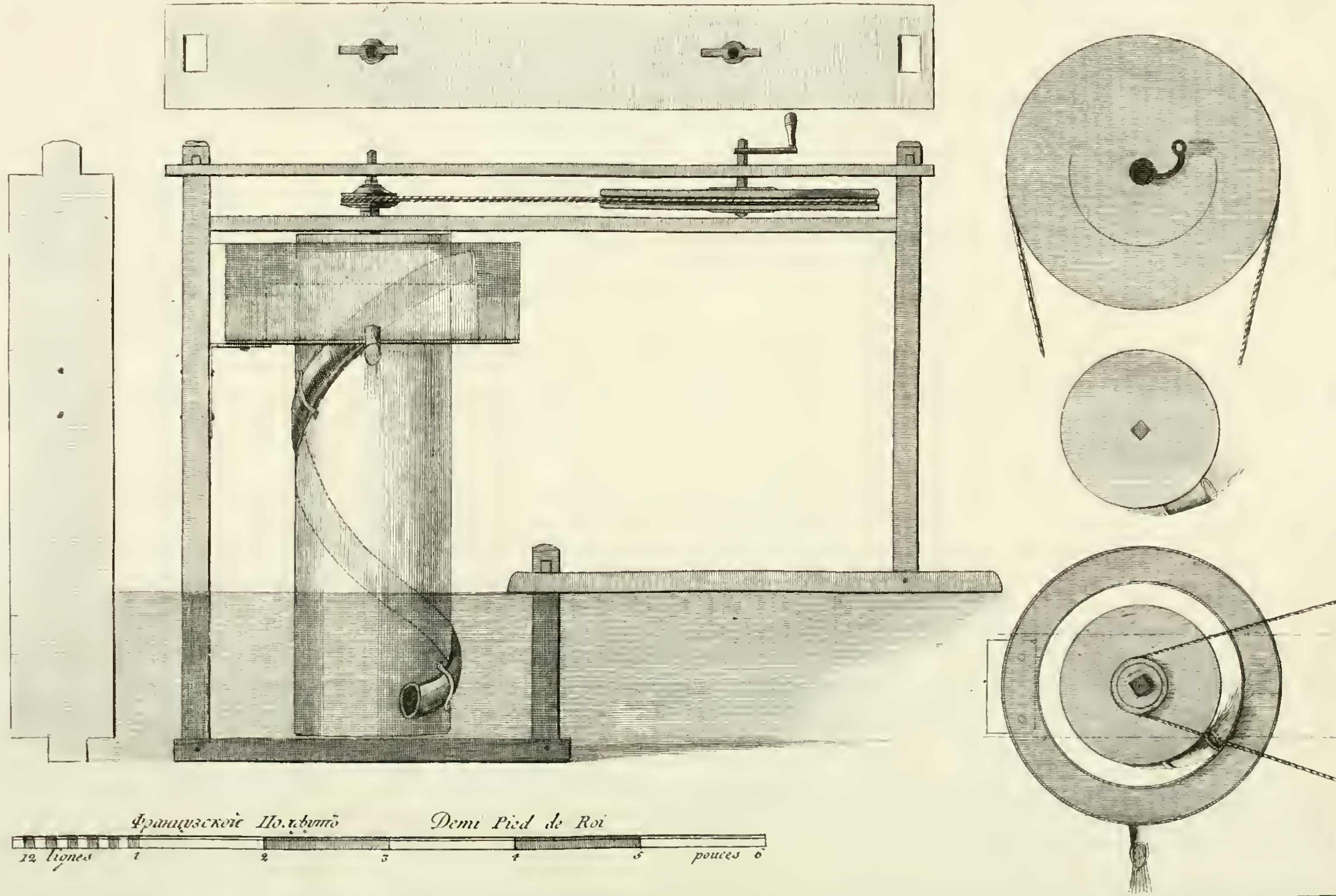
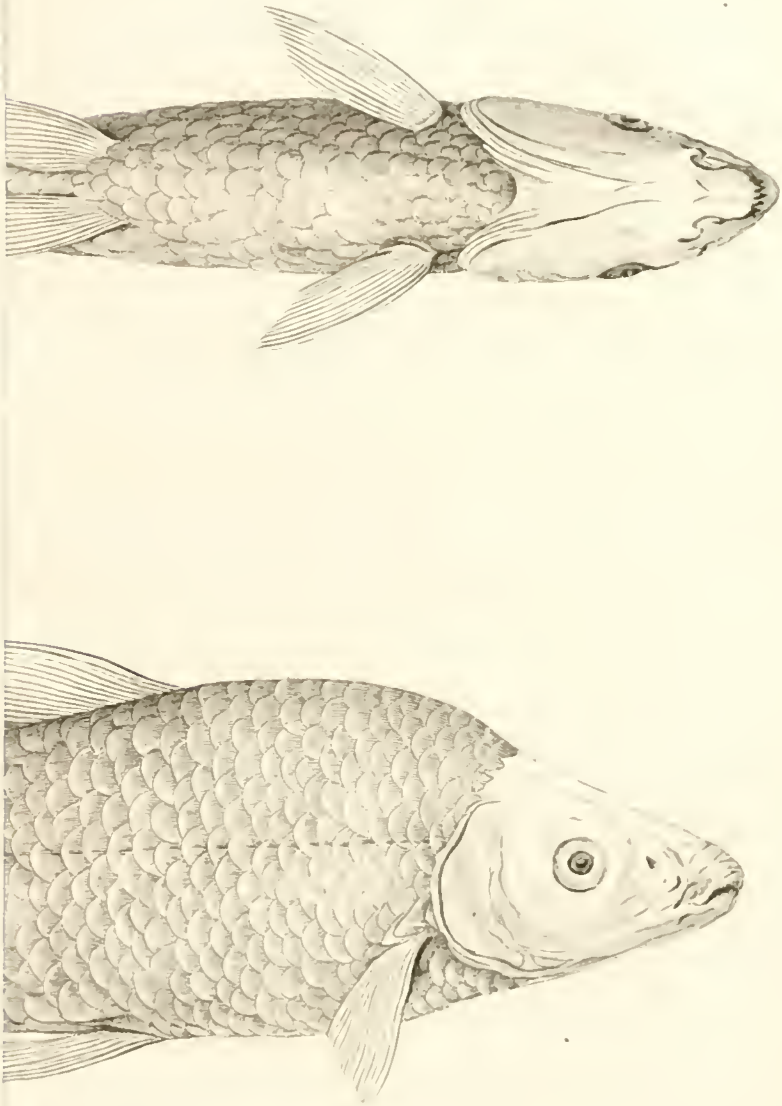
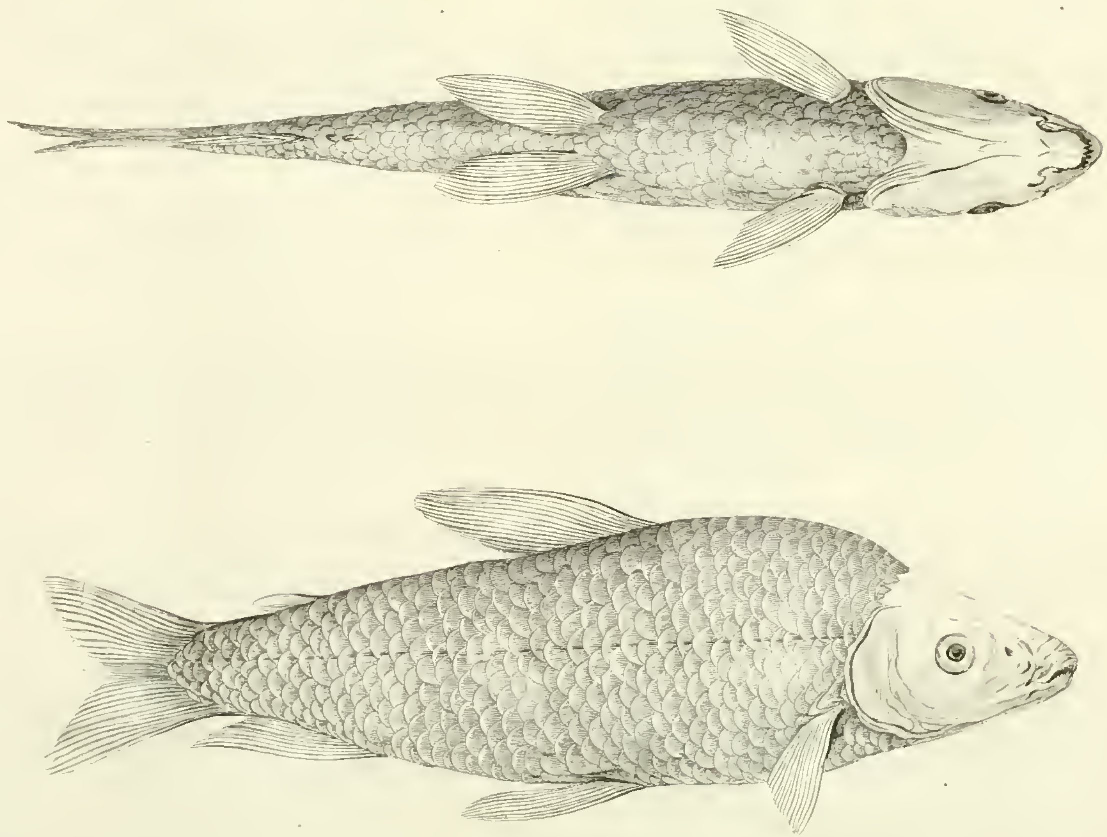


Fig. 8.

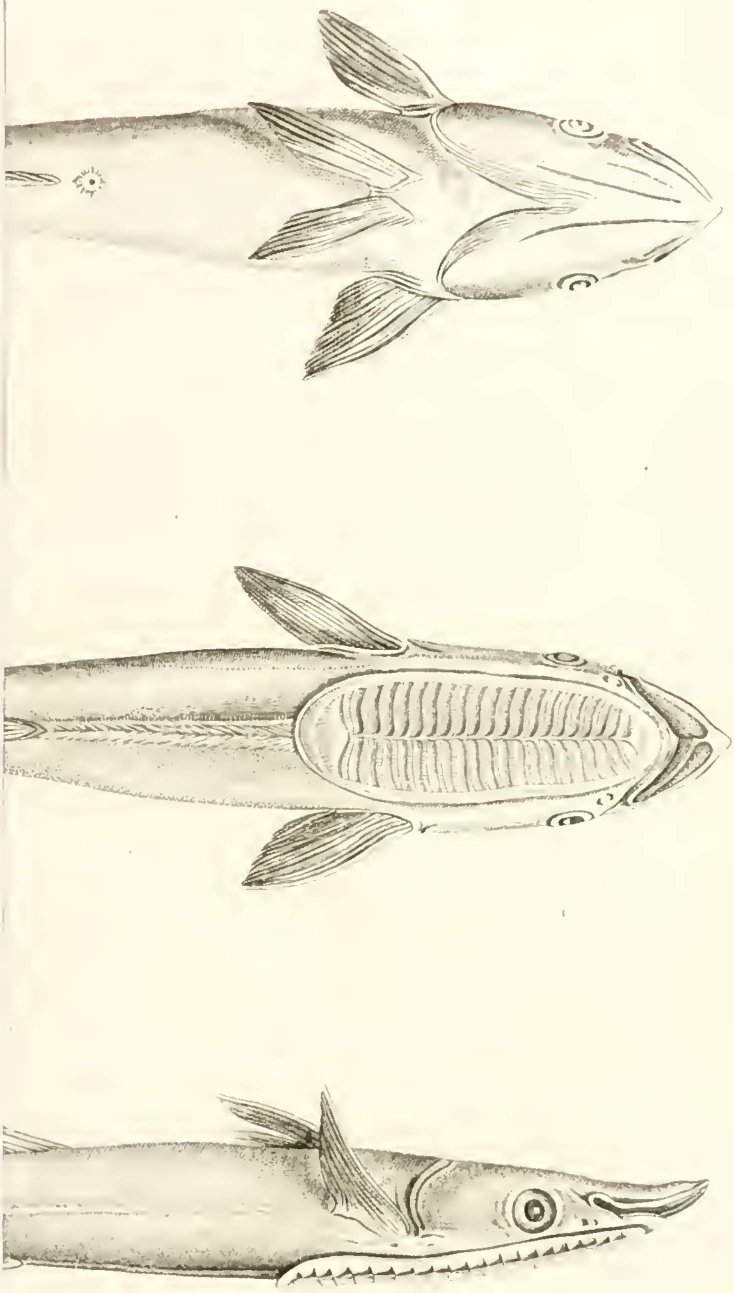


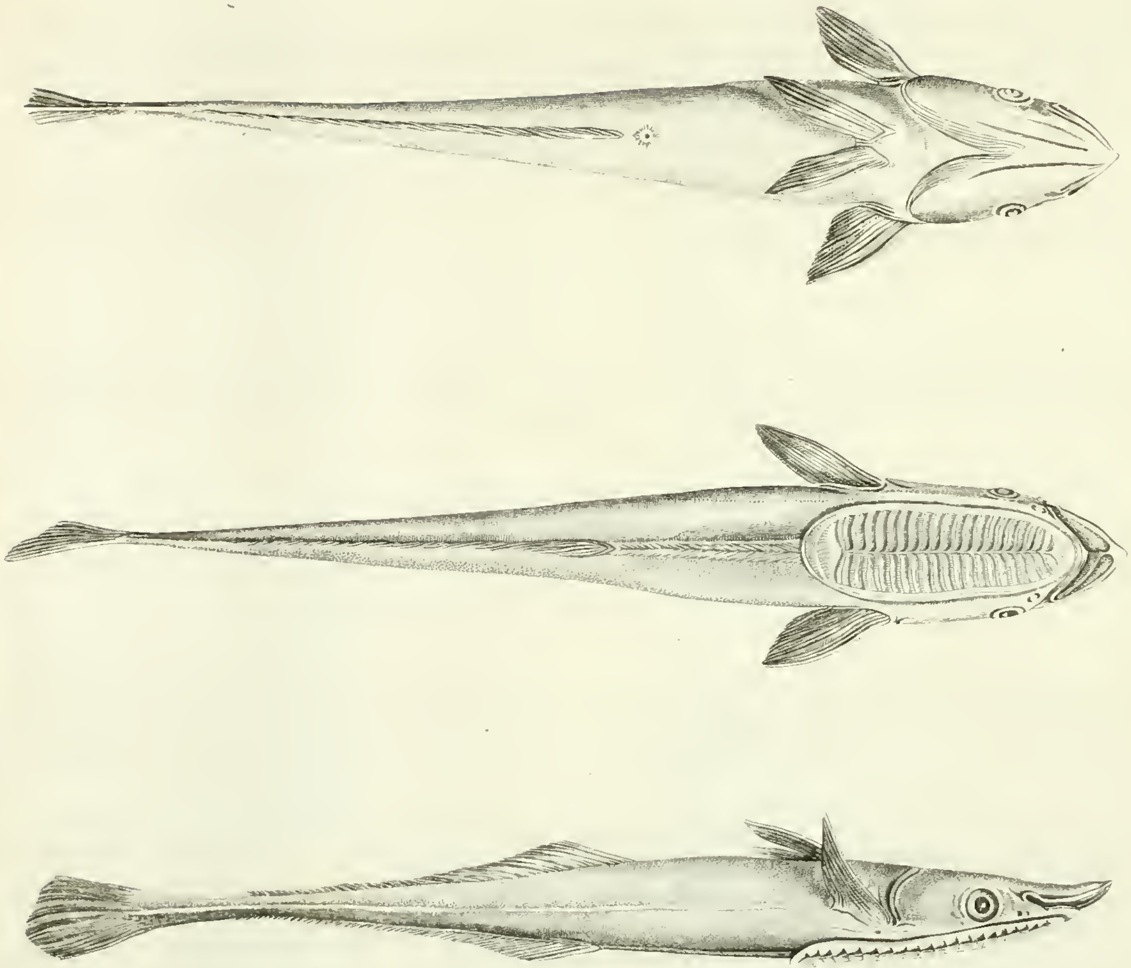

Французское Полфута
Demi Pied de Roi
12 lignes
1
2
3
4
5
pouces 6

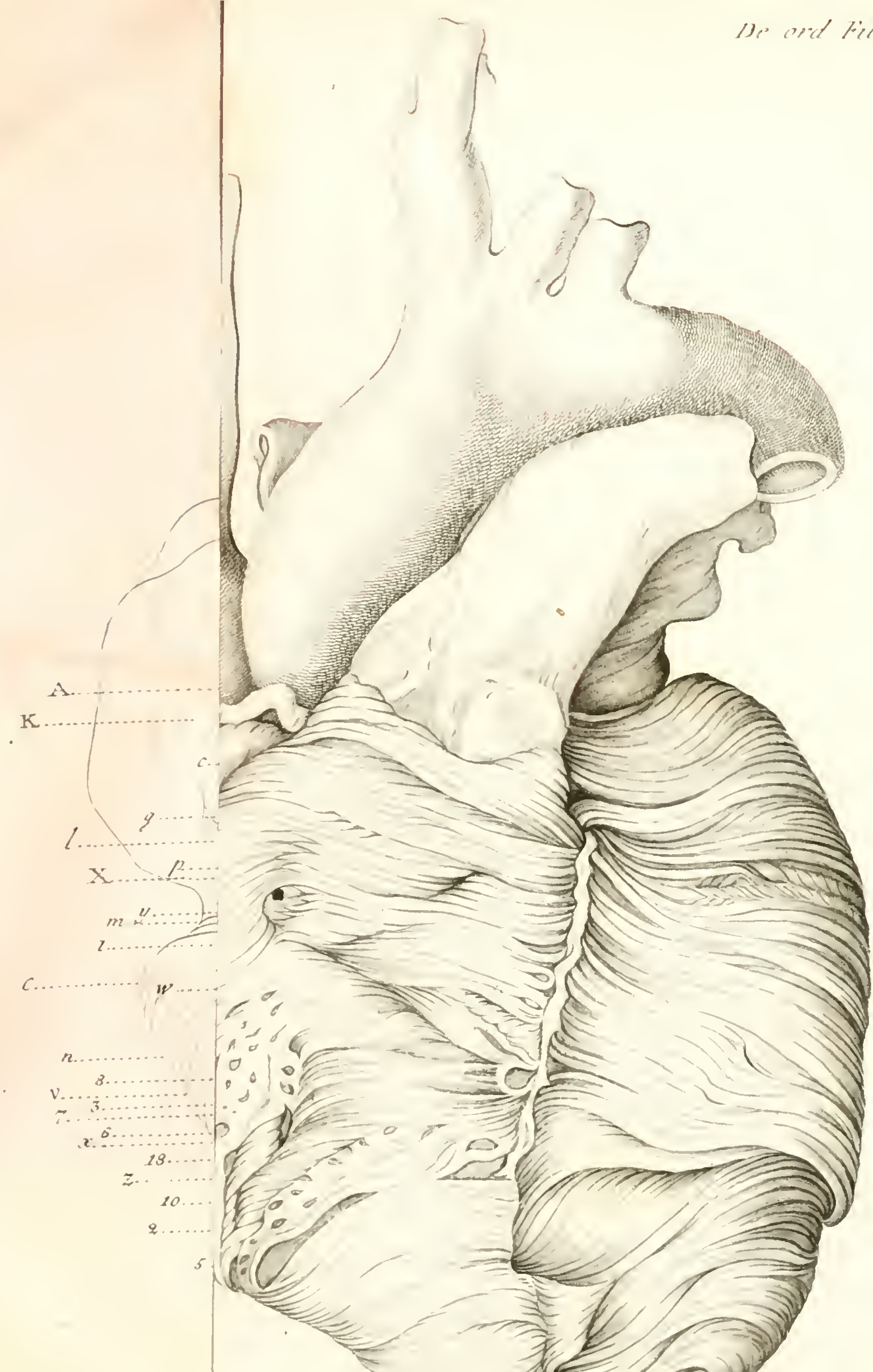




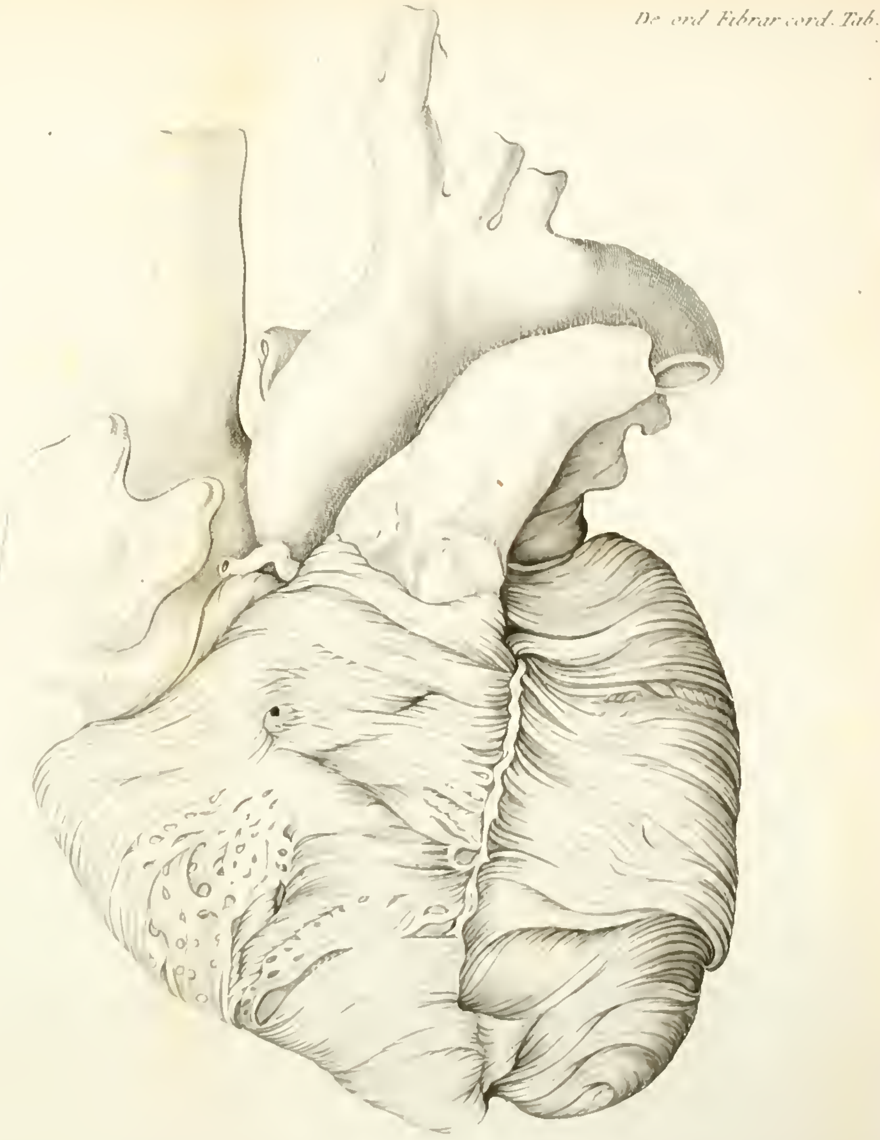
Nova Acta Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom IV. Tab. VI.






A
K
c
g
l
p
X
u
m
l
C
w
n
8
V
3
7
6
x
18
z
10
2
5


R
S
Q
W
T
O
P
N
M
L
H
A
K
G
B
E
X
Y
D
F
I









AMNH LIBRARY
100127229